Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wolters-Noordhoff

816
357
492

jaargang 67 1991 | 1992 oktober

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Inhoud

Actualiteit 34
H. N. Schuring, C. Lagerwaard, J. W. Maassen *Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1991*
Een beschrijving van de resultaten; verder een overzicht van meningen en vragen van docenten, en de antwoorden van examenmakers op de gestelde vragen.

Bijdrage 40
Henk Mulder *Boogbruggen, een wiskundig project* **40**
Over drukkrachten in boogbruggen en hoe leerlingen de vergelijking van de parabool van een brugboog kunnen bepalen.
R. Leentfaar *Lange getallen zelf berekenen* **44**
Door steeds betere rekenmachines en software is het mogelijk geworden lange getallen zoals 100 ! te berekenen.

Verschenen 46, 63

Bijdrage 47
Theo Obdeijn *En Cindy dan?*
Hoeveel cirkels passen er in een gymzaal?

Werkbladen 48

Bijdrage 50
Francis Meester, Joop van Dormolen *Het nieuwe leerplan 12-16 (3)* **50**
Hoe bereidt het nieuwe programma voor op havo en mbo?
Prof. Dr. G. Y. Nieuwland *Het beroep van wiskundige (1)* **53**
De beeldvorming rond de 'wiskundige' is nogal vaag... En hoeveel wiskunde is – zichtbaar of onzichtbaar – aanwezig in informatica en andere vakken?

Brief 58

Mededeling 59

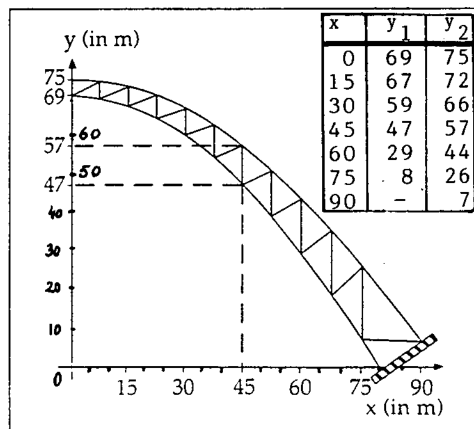
40 jaar geleden 59

Verenigingsnieuws 60
Uitwisselingsbijeenkomsten Hawex **60**
Jaarvergadering/Studiedag 1991 **60**
Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1990 - 31 juli 1991 **61**

Mededeling 62

Recreatie 63

Kalender 64



x	y_1	y_2
0	69	75
15	67	72
30	59	66
45	47	57
60	29	44
75	8	26
90	–	7

De dubbele vakwerkboog.

▶ Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1991

H. N. Schuring, C. Lagerwaard, J. W. Maassen

Inleiding

In dit artikel vindt men enige gegevens van deze examens. Eerst komen de resultaten aan de orde aan de hand van de steekproefgegevens die het CITO verzameld heeft (H. N. Schuring en drs. C. Lagerwaard), met daarbij de vaststelling van de cesuur door de CEVO met behulp van deze steekproefgegevens en de meningen van de docenten. Deze meningen vindt men tenslotte in een verslag van de regionale besprekingen van deze examens, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (drs. J. W. Maassen).

De resultaten van de examens

Het geven van een overzicht van de resultaten van deze examens is slechts mogelijk dankzij de medewerking van de betrokken docenten die de gegevens van vijf kandidaten (voor HAWEX alle kandidaten) van hun school tijdig hebben opgestuurd.

Enige algemene gegevens van de examens

	vwo-A	vwo-B	havo	havo-A	havo-B
aantal kandidaten	24700	19800	32200	1000	700
gemiddelde score	62	57	56	62	58
standaarddeviatie	14	16	16	14	15
betrouwbaarheid	79	80	77	76	80
cesuur	54/55	54/55	54/55	54/55	54/55
percentage onvoldoenden	32	43	46	28	38
gemiddeld cijfer	6,2	5,7	5,6	6,2	5,8

p'-waarde van de afzonderlijke vragen van de examens

vraag	vwo-A	vwo-B	havo	havo-A	havo-B
1	91	81	75	87	84
2	66	86	79	77	86
3	84	83	30	94	56
4	34	36	85	90	16
5	67	73	51	94	86
6	91	61	48	82	36
7	52	63	86	48	55
8	27	37	48	37	87
9	55	62	35	32	78
10	73	56	38	85	56
11	73	42	32	72	67
12	77	42	39	73	59
13	16	27	58	73	55
14	77	54	13	55	46
15	78	20	—	40	14
16	78	—	—	32	50
17	46	—	—	45	21
18	18	—	—	33	—
19	8	—	—	51	—
20	—	—	—	82	—
21	—	—	—	18	—
22	—	—	—	12	—

n.b. de p'-waarde van een vraag is de gemiddelde score, uitgedrukt in procenten van de maximum score van die vraag.

Vwo wiskunde A

Vele docenten vinden dit een goed examen met een goede afwisseling van gemakkelijke en moeilijke onderdelen.
Opgave 1, Wind en kou, is goed gemaakt op vraag 4 na, waarin een formule opgesteld moet worden waarmee het warmteverlies van de huid bij hoge windsnelheden uitgerekend kan worden. 60% van de kandidaten scoorde hier niet op. In opgave 2,

Bibliotheek, is vraag 8, het lineair programmeren, de moeilijkste vraag gebleken. 55% van de kandidaten scoorde hierop 0 punten. De laatste vraag van opgave 3, Bezonning, waarin de grafiek voor het dagelijks aantal bezonningsuren voor een zuidgevel getekend moest worden, heeft veel stof doen opwaaien. Menigeen was ervan overtuigd dat een zuid-gevel tussen het begin van de lente en het begin van de herfst steeds 12 uur door de zon beschenen kan worden en de grafiek in die periode dan ook horizontaal getekend moest worden. Dit is echter niet juist omdat de zon in de zomer niet om 6 uur 's ochtends in het oosten staat, maar steeds later de oost-west-lijn passeert. Op 52°N.B. is het verschil op 22 juni opgelopen tot ongeveer 1 uur en een kwartier. Vanwege de symmetrie van de zonsbaan treedt een gelijk verschil in het westen op, zodat de maximale bezonning van een zuid-gevel op 22 juni slechts ongeveer 9½ uur bedraagt. Dit resultaat is in overeenstemming met de gegevens op de bijlage bij vraag 13. 76% van de kandidaten scoorde niet op deze vraag 13.
De laatste vragen van opgave 4, Storing, waarin de kans berekend moet worden dat de totale teltijd 10 minuten is en aangetoond moet worden dat de kans op 9 minuten, 10 minuten, ..., 16 minuten gelijk zijn, heeft respectievelijk 74% en 84% niet kunnen maken.
De CEVO heeft de cesuur op 54/55 vastgesteld.
60% van de vwo-kandidaten heeft wiskunde A gekozen, waarvan 18% ook wiskunde B in hun pakket heeft. De gemiddelde score van deze groep was voor het wiskunde A-examen 72. De kandidaten die geen wiskunde B en geen natuurkunde in hun pakket hebben gekozen, hebben een gemiddelde score van 56.
De constructeurs van dit examen hebben een gemiddelde score van 60 voorspeld, terwijl de werkelijke gemiddelde score 61,6 is.

Vwo wiskunde B

48% van alle vwo-kandidaten heeft het wiskunde B examen afgelegd.
Dit examen werd door veel docenten als niet te moeilijk en niet te veel beschouwd. Toch vallen de resultaten tegen. Dit kan veroorzaakt zijn doordat het examen laat in het rooster werd afgenomen en bovendien op een middag.
De CEVO heeft de cesuur voor dit examen vastgesteld op 54/55.
Vraag 4, met daarin het bewijs dat de asymptoot tevens symmetrie-as is, is slecht gemaakt evenals de oplossing van de differentiaalvergelijking in vraag 8. Het percentage kandidaten dat hier niet op scoorde, was 18, respectievelijk 48.
52% van de kandidaten scoorde niet op vraag 13, het berekenen van de straal van een bol. Voor vraag 15, het tekenen van het snijpunt van een lijn op een kegel die een cilinder raakt, met het voorvlak van een kubus, is dit percentage 47.
De moeilijkheid van dit examen is door een groep van 24 ervaren docenten van te voren geschat. Bij deze schattingen moest men uitgaan van een gemiddelde leerling die terecht op het vwo zit en terecht wiskunde B heeft gekozen.
De geschatte gemiddelde score was 62,2, aanzienlijk hoger dan de werkelijke gemiddelde score van 57,4. Zou dit verschil, behalve door het tijdstip van afname, ook kunnen worden veroorzaakt doordat niet iedere kandidaat terecht dit examen aflegt?

Havo wiskunde

Hoewel dit examen zeer redelijk was, valt het resultaat tegen.
De CEVO heeft de cesuur vastgesteld op 54/55.
Vraag 14, de laatste vraag van opgave 5 over een wortelfunctie, heeft de laagste p'-waarde, terwijl 68% van de kandidaten hier 0 punten scoorde. Teleurstellend is te moeten constateren dat het bewijs dat de gegeven afgeleide goed is in vraag 11, zonder succes gebleven is voor 55% van de kandidaten.

HAWEX

In het kader van het HAWEX-experiment werden in 1989 en in 1990 experimentele examens afgenomen voor de vakken wiskunde A en wiskunde B voor havo. Beide jaren betrof het leerlingen van slechts drie scholen. Dit jaar zijn experimentele HAWEX-examens afgenomen op 29 scholen.
Onder verantwoordelijkheid van de CEVO zijn de

opgaven voor het cse tot stand gekomen door nauwe samenwerking van de betreffende ACD met het ontwikkelteam van het HAWEX-experiment. Hierdoor konden de examens optimaal aansluiten op het experimentele lesmateriaal.

Enige steekproefgegevens omtrent de examens 1989, 1990 en 1991:

	Wiskunde A			Wiskunde B		
	89	90	91	89	90	91
aantal kandidaten	56	95	883	125	138	569
gemiddelde score	76	67	62	60	56	58
standaarddeviatie	13	14	14	16	12	15
cesuur	54/55	54/55	54/55	54/55	50/51	54/55
percentage onvoldoenden	7	19	28	36	32	38

In 1992 zullen de examens wiskunde A en B voor havo op alle scholen worden afgenomen, zodat het experiment nu ten einde gekomen is.
De prognose is dat in de toekomst ongeveer een derde deel van de havo-kandidaten wiskunde B zal kiezen en ruim de helft wiskunde A.
De aantallen kandidaten in het experiment duiden op een naar verhouding te grote deelname aan het vak wiskunde B.

Havo wiskunde A

Zoals uit het overzicht is af te lezen, zijn de resultaten voor het examen wiskunde A iets minder goed dan in 1990: een gemiddelde score van 62 en 28% onvoldoenden. Docenten van de experimenteerscholen waren van mening dat met dit examen de moeilijkheidsgraad goed was aangegeven. Van de vijf opgaven werd de eerste opgave, zoals bedoeld, goed gemaakt. De probleemsituatie was doorzichtig en de vragen deden een beroep op standaardvaardigheden. Van de overige 4 opgaven werden de beginvragen steeds goed gemaakt, maar liepen de scores terug bij de meer inzichtelijke en/of complexe vervolgvragen.

Havo wiskunde B

Ook het wiskunde B-examen is goed ontvangen door leerling en docent, hoewel de resultaten wat tegenvielen, zoals uit het overzicht blijkt.
De CEVO heeft besloten de cesuur op 54/55 vast te stellen.
Over het algemeen hebben de kandidaten beter gescoord op de analyse-opgaven (opgave 1, 3 en 4) dan op de meetkunde-opgaven (opgave 2 en 5).
De laatste vraag van opgave 1, vraag 4, waarin de parameterwaarden gevonden moesten worden waarvoor de grafiek slechts 1 punt met een lijn gemeen heeft, heeft de laagste p'-waarde van de analyse-vragen. 53% van de kandidaten scoorde hierop niet. Verheugend is het redelijk goede resultaat van de gonio-opgave 3, met p'-waarden respectievelijk 87, 78 en 56 van de vragen 8, 9 en 10.
71% van de kandidaten heeft niet gescoord op vraag 15, waarin inhoudsformules moesten worden opgesteld. Voor vraag 17, de uitsmijter van het examen, was dit percentage 57.

Regionale besprekingen wiskunde vwo en havo 1991

Traditiegetrouw organiseerde de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook in 1991 regionale besprekingen voor het examen wiskunde.
Bijna 200 docenten bezochten de wiskunde A-besprekingen die gehouden werden op 9 plaatsen; de bijeenkomsten voor wiskunde B, die op 5 plaatsen gehouden werden, en voor wiskunde havo, die op 4 plaatsen werden gehouden, trokken elk ongeveer 100 docenten.
Evenals vorige jaren werden op de bijeenkomsten aan het begin enige vragen over het examen gesteld. Dit leidde tot de volgende resultaten.

	wiskunde A-vwo	wiskunde B-vwo	wiskunde havo
in vergelijking tot vorig jaar is het niveau van het CSE 1991			
lager	8%	26%	41%
gelijk	53%	63%	55%
hoger	39%	11%	4%
de spreiding over de stof is			
slecht	35%	21%	3%
voldoende	60%	75%	81%
goed	5%	4%	16%
het aantal routinevragen is			
te klein	18%	6%	5%
goed	79%	92%	87%
te groot	3%	2%	8%

	wiskunde A-vwo	wiskunde B-vwo	wiskunde havo
het aantal originele opgaven is			
te klein	1%	3%	13%
goed	69%	89%	83%
te groot	30%	8%	4%
het correctievoorschrift is			
te gedetailleerd	1%	1%	0%
goed	93%	45%	91%
te weinig gedet.	6%	54%	9%
de poging om de opgaven naar opklimmende moeilijkheidsgraad te rangschikken is			
niet gelukt	76%	17%	5%
redelijk gelukt	22%	59%	50%
goed gelukt	2%	24%	45%
de leesbaarheid van de vraagstukken is in het algemeen			
slecht	19%	3%	0%
voldoende	67%	50%	21%
goed	14%	47%	79%
de omvang van het CSE 1991 was			
te gering	1%	0%	9%
goed	36%	65%	86%
te veel	63%	35%	5%

De percentages zijn berekend over het aantal aanwezigen dat een keuze deed.
Van bijna alle bijeenkomsten zijn verslagen gemaakt waarvan een kopie aan de CEVO is gezonden met het verzoek de gemaakte opmerkingen te gebruiken bij het opstellen van de examens voor de volgende jaren.
In dit artikel worden slechts de belangrijkste punten uit de verslagen samengevat.

Vwo wiskunde A

In de verslagen van de diverse regionale bijeenkomsten valt het op dat de meningen van de regio's soms nogal verschillen.
Terwijl men in het algemeen positief over het examen oordeelt (goed en leuk werk, dit is het juiste niveau; leerlingen worden erg aan de hand genomen; grote vaagheden zijn verdwenen), liet Den Haag juist weten: 'Ook in het verleden is er kritiek geuit op de opgaven. Men heeft de indruk dat er niet wordt geluisterd. Men vond dit werk zeker niet beter dan in 1989 en de spreiding *nog* slechter.' en 'Het examen heeft bij de leerlingen nogal wat reacties opgeroepen. Men vroeg zich af wat de effecten op de rest van het CSE kunnen/zullen zijn.' Bovendien vond Den Haag het werk eenzijdig (geen normale verdeling of matrices), terwijl het vraagstuk over lineair programmeren te veel tijd vroeg waardoor veel leerlingen niet aan de laatste opgaven zijn toegekomen.
Ook over de leesbaarheid van de vraagstukken oordeelt men zeer verschillend. In zes van de bijeenkomsten vindt niemand dat de leesbaarheid slecht is, terwijl Tilburg hieraan toevoegt: 'Tekst veel (acceptabel) doch goed leesbaar voor autochtonen. Eén leraar met veel allochtonen in zijn groep leerlingen stelde voor om tijdens het examen wiskunde A leerlingen met taalachterstand toe te staan een woordenboek te gebruiken.' Daarentegen vindt in Groningen 17% van de aanwezigen de leesbaarheid slecht, terwijl dit percentage in Rotterdam 31 en in Amsterdam 61 bedraagt.
Er werden wel veel opmerkingen over het examen gemaakt.
Men vond het veel lees- en rekenwerk (mag het ietsje minder zijn?) en men vond twee kettingvragen (lineair programmeren en de vragen 17 t/m 19) storend. Hoewel bij veel vragen vermeld was hoe men moest afronden, ontbrak informatie hierover bij de vragen 2, 4 en 12. Bovendien: betekent 'in minuten nauwkeurig' hetzelfde als 'in gehele minuten nauwkeurig'?
Men vroeg de formulering 'in gehele graden nauwkeurig' (opgave I) niet meer te gebruiken. In opgave II hadden sommigen liever gezien dat de leerlingen hun eigen variabelen konden kiezen, hoewel het de aanwezigen wel duidelijk was waarom voor deze weg gekozen was.
Enkelen vonden opgave III te veel wiskunde B-achtig.
De formule bij vraag 15 komt uit de lucht vallen en hij functioneert verder nergens meer. Door de leerlingen de formule te laten bewijzen voor $n = 1$ laat men de leerlingen iets zinnigers doen dan alleen maar een invuloefening maken.
Ook was er kritiek op de redactie van vraag 17. De veronderstelling dat de kans op storing 0,9 is, wordt een pagina vóór vraag 17 genoemd, terwijl deze veronderstelling pas bij vraag 17 gebruikt behoeft te worden; de tussendoor gegeven informatie wekt dan verwarring.
In de formulering van vraag 17 zag men 'werkelijke waarde' graag vervangen door 'waarde volgens het model'.

Men heeft soms moeite met de gegeven normering. In één van de verslagen staat: 'Opvallend was de gemiddeld hoge leeftijd van de aanwezigen. Wordt wiskunde A alleen door de oude garde gegeven of zijn de jonge leraren beter opgeleid in wiskunde B of kennen zij hun verantwoordelijkheid soms niet?'
Vragen die uit de bijeenkomsten kwamen, zijn:
- Komt er een formuleblad voor correlatie en regressie voor gebruik bij het examen?
- Kunnen er duidelijke uitspraken komen over het al dan niet gebruiken van de continuïteitscorrectie bij de benadering met de normale verdeling en kan dit ook in de norm beschreven worden?
- De stappen in de norm leveren punten. Als zo'n stap is overgeslagen maar impliciet is gemaakt – blijkend uit de volgende berekening van de leerling – of de leerling vindt die stap blijkbaar niet zo nodig, moeten dan de punten voor de beschreven opmerking wel of niet toegekend worden? (Dit naar aanleiding van de norm: 'Voor het opstellen van de hypothese ... 2 ptn.')
- Het blijft elk jaar weer de vraag of bij het bepalen van een extreem een tekenschema gegeven moet worden. Wanneer wordt het gewoon dat in het correctievoorschrift staat: Voor het tekenschema 1 punt?

Vwo wiskunde B

In een van de groepen merkte men op dat de spreiding over de stof slecht was omdat er in de analyse te veel vragen over differentiaalvergelijkingen waren en in de ruimtemeetkunde te veel over bollen. Hierbij betreurde men het dat de tijd voor de kandidaten aan de krappe kant was.
Sommigen meenden dat het examentijdstip (in de middag en aan het einde van de examenperiode) voor veel kandidaten waarschijnlijk funest geweest is, terwijl anderen zich afvroegen of er misschien te veel leerlingen wiskunde B hebben gekozen.
Diverse groepen hadden problemen met de afrondingseisen. Waarom moesten in vraag 2 de coördinaten in één decimaal nauwkeurig, terwijl in vraag 3 een exact antwoord geëist werd? In het correctievoorschrift had dan ook (0,0; 0,6) en (0,0; −2,0) moeten staan.
Rekening houdend met de diverse leerboeken was het misschien verstandig geweest om in vraag 15 te spreken over cilindervlak in plaats van over cilinder.
Het verlangen leeft naar een grotere duidelijkheid wanneer er wel en wanneer er geen toelichting vereist is, door daar bijvoorbeeld expliciet naar te vragen of daar formuleringen voor af te spreken.
Vooral wordt ook naar duidelijkheid gevraagd met betrekking tot asymptoten. Als er geen asymptoten zijn, worden er geen punten toegekend voor het onderzoek naar asymptoten.
Ook werd gepleit voor vermelding van de maximaal te behalen puntenaantallen bij de opgaven zodat een kandidaat niet te veel tijd aan een vraag gaat besteden.
Vragen die in groepen werden gesteld:
- Het tekenen van de grafiek van een functie is duidelijk omschreven. Welke eisen moeten we stellen aan het tekenen van een kromme als bijvoorbeeld de vragen die aan het tekenen voorafgaan foutief beantwoord worden terwijl er toch een juiste grafiek is (met behulp van punten uit een gemaakte tabel)?
- Welke definitie van integraalkromme moet worden gehanteerd?

Een integraalkromme van $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ is een kromme die de eigenschap bezit dat in elk van haar punten de raaklijnrichting door deze differentiaalvergelijking wordt gegeven (Dr. L. Kuipers, Leerboek der analyse, deel II).

Mag dan vraag 7 wel zo gesteld worden als in dit examen omdat in de punten $(-1,0)$ en $(3,0)$ $\frac{dy}{dx}$ niet gegeven wordt door de gegeven differentiaalvergelijking.

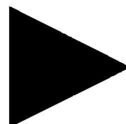
Wiskunde havo

Echt ingrijpende zaken werden uit de groepen niet gemeld.
In een van de groepen was grote kritiek op het woord 'bereken' in onderdeel 8, waardoor het niet mogelijk was een grafische oplossing te geven terwijl de tendens van het nieuwe meetkunde-onderwijs juist gaat in de richting van kijken naar wat er

gebeurt. In dezelfde groep vond men onderdeel 14 te ver gaan voor een havo-leerling.
Men vond dat voor sommige onderdelen veel punten werden toegekend en voor andere onderdelen erg weinig.
Bij de onderdelen 4, 5 en 6 was niet iedereen gelukkig met het correctiemodel. Bij bepaalde fouten was het zeer moeilijk het model te volgen.
Er was een grote belangstelling voor het bezemexamen van dit jaar om te weten wat men volgend jaar voor de gezakte leerlingen kan verwachten. Men wil graag op korte termijn een antwoord op de volgende vragen:
– Bij sommigen is er wat bezorgdheid over de vorm van de bezemexamens in 1992. Kan men met de gewone examens oefenen of is er in de opgaven een grotere diepgang te verwachten omdat er nogal wat onderwerpen uit het programma worden weggelaten? Moet men nu bijvoorbeeld ruimtemeetkunde-opgaven op wiskunde B-niveau verwachten?
– Ook is er een dringend verzoek om duidelijkheid ten aanzien van het nieuwe landelijke examen wiskunde B op de havo. In de experimentele examens komen veel contextrijke vragen voor. Hoe gaat dit worden in de komende jaren? Kijkt men naar de leermethoden die op dit moment gebruikt worden, dan is daarin een duidelijk verschil in het gebruik van contexten en de aard daarvan.

Gesprekken met examenmakers hebben de volgende antwoorden opgeleverd op de vragen gesteld op de regionale bijeenkomsten.

– Er komt geen formuleblad voor correlatie en regressie ten behoeve van de vwo wiskunde A-examens, de kandidaten moeten de formules kennen. Het is niet uitgesloten dat in een opgave een bepaalde formule die niet algemeen bekend is, zal worden gegeven. (Zie ook Euclides 66° jaargang nr. 3, november 1990, pag. 82 e.v.)
– Er zijn geen algemeen aanvaarde regels voor het gebruik van de continuïteitscorrectie bij de benadering met de normale verdeling. Vaak is het gebruik een verbetering, maar dikwijls zijn de verschillen niet groot. (Zie ook Euclides 62° jaargang nr. 5, februari 1987, pag. 136 en 65° jaargang, nr. 4, december 1989, pag. 119.)
– De correctievoorschriften zijn bindend. Heeft een kandidaat een andere oplossingsmethode gekozen dan in het correctievoorschrift staat aangegeven, dan moet de beoordeling zo goed mogelijk aansluiten bij de beschreven wijze.
– Bij het bepalen van een extreem is het in het vak wiskunde A niet altijd noodzakelijk dat een tekenschema gegeven wordt. Soms kan men bijvoorbeeld in een gegeven grafiek aflezen dat in een bepaald interval er een maximum moet optreden.
– Bij wiskunde B is het tekenen van een kromme door middel van het berekenen van een aantal punten heel weinig waard. Zijn foutief berekende essentiële punten in strijd met de tekening, zonder dat dit opgemerkt is door de kandidaat, dan kan men voor de tekening niet het maximaal te behalen puntenaantal toekennen.
– In het rapport van de werkgroep differentiaalvergelijkingen (zie Euclides 65° jaargang nr. 2, oktober 1989, pag. 35 e.v.) staat dat op het CSE zo'n vergelijking in de vorm
$\frac{dy}{dx} = \Phi(x, y)$ beschreven zal worden.
Dit heeft als gevolg dat punten met verticale raaklijn niet goed door de differentiaalvergelijking bepaald worden. Het staat uiteraard ieder vrij om losse differentialen te gebruiken.
– Het bezemexamen havo wiskunde zal opgaven bevatten in de vorm en met de diepgang zoals die in het verleden gebruikelijk was. Hoewel het curriculum onderwerpen gemeen heeft met havo wiskunde B zullen er andere vragen gesteld worden in het bezemexamen dan in het havo wiskunde B-examen.
– Het havo wiskunde B-examen zal contextrijke opgaven bevatten zoals in de experimentele examens tot uitdrukking is gebracht.



Mededeling

Door een tegenvaller bij de vrachtbezorging is nummer 1 veel later uitgekomen dan in onze bedoeling lag.
Hiervoor onze excuses.

Het bestuur

Boogbruggen, een wiskundig project

Henk Mulder

In het kader van projecten bieden bruggen interessante toepassingen van wiskunde. In het artikel 'Hangen aan een kromme' (Euclides 1990/2) hebben we daar de aandacht al op gericht. Toen ging het om hangbruggen; in dit artikel gaat het om de geometrie van de boogbrug.

In hangbruggen worden kabeldelen op *trek* belast, bij boogbruggen gaat het om *druk*krachten. Als dergelijke krachten te groot worden ontstaat in het eerste geval breuk, in het tweede doorbuiging of knik.

Ook bij boogbruggen zien we parabolen verschijnen waar, bij voldoende gegevens, zaken als hoogte en spanwijdte, staaflengten, coördinaten kunnen volgen. Ook kan een vergelijking van de kromme bepaald worden. Optredende krachten geven toepassingen op het terrein van de vectoren.

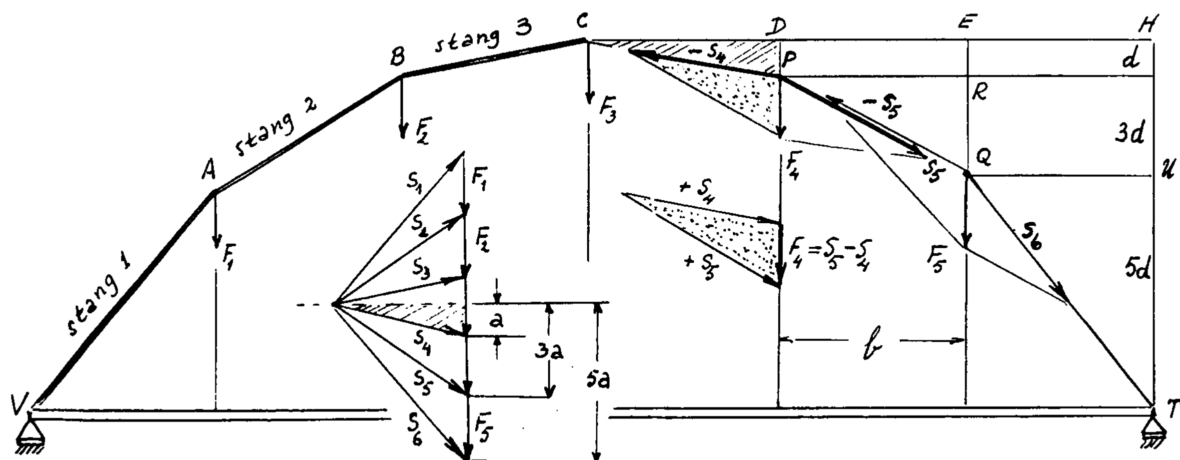
Het is mogelijk werktekeningen op te vragen bij Rijkswaterstaat. Sommige bruggen zijn dermate bereikbaar dat leerlingen er in groepjes zelf metingen aan kunnen doen.

Hoe het was

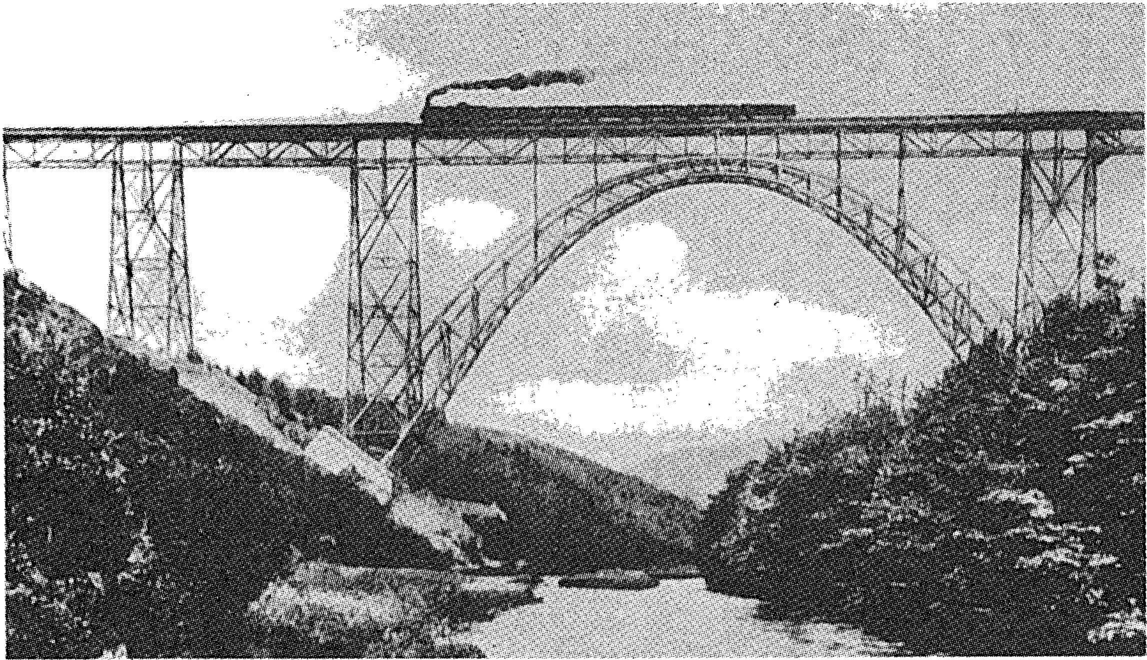
Er zijn nog boogbruggen uit de Romeinse tijd. De verbindingen tussen pijlers en muren bestonden meestal uit halfcirkelvormige gewelven. In de 16-de eeuw werden er ook elliptische boogbruggen gebouwd, waardoor het wegdek lager kon komen. Een voorbeeld daarvan is de brug over de Arno bij Florence. Met de komst van smeedijzer verschijnen in het begin van de 19de eeuw de eerste vakwerkbruggen.

De ideale vorm

Een cirkel heeft een constante kromming. Als op



Figuur 1 Krachtenverdeling in een boogbrug.



Figuur 2 Boogbrug over de Wupper.

een gewelf alleen radiaal gerichte, even grote krachten werken, is deze vorm het gunstigst. Zo treden er geen dwarskrachten op. Om die reden hebben tanks met vloeibaar gas ook de bolvorm. In het geval er alleen verticale krachten werken, kan de paraboolvorm ideaal zijn. Parabolische gewelven hebben de eigenschap dat bij een regelmatige verdeling van even grote verticale krachten er geen dwarskrachten binnen de draagconstructie optreden. Via de parabool worden deze krachten dan afgeleid naar de fundering.

Onderzoek

In figuur 1 staat een boogbrug waaraan een wegdek hangt, waarvan het gewicht groot is ten opzichte van dat van de boogdelen.
De brug rust op de beide eindpunten V en T en hangt via staven aan de vijf punten A, B, C, P en Q. Ga na dat als het brugdek een gewicht G heeft, de krachten F_1, F_2... ieder een zesde van G zijn.

De vijf verticale draagstangen hebben onderling gelijke afstanden b. Daarom zijn de trekkrachten in de verticalen, bij onbelast wegdek, ook allemaal even groot.
De krachtsvectoren F_1, F_2... worden ontbonden in de richtingen van de boogelementen. Zo wordt bijvoorbeeld F_4 ontbonden in twee vectoren in de richting van C en Q. Dit bepaalt tevens de grootte van de drukkrachten in de stangen CP en PQ.
Nu werken volgens 'actie is min reactie' in elke stang twee even grote tegengestelde drukkrachten. In stang PQ zijn dat S_5 en $-S_5$.
Het totale vectordiagram is apart ingetekend. Daar is af te lezen: $F_1 = S_2 - S_1$; $F_2 = S_3 - S_2$ en zo verder. De driehoeken CDP, PRQ en QUT zijn telkens gelijkvormig met een krachtendriehoek in het vectordiagram. Voor één stel hebben we dat door een arcering aangegeven. De verhouding 1 : 3 : 5 op de verticaal door T volgt dan ook uit diezelfde verhouding in het vectordiagram.
Een volgende conclusie is: $DP : EQ : HT = 1 : 4 : 9$. En daarom liggen de hoekpunten van de polygoon

op een parabool. Hetzelfde hebben we in het artikel over de hangbrug aangetoond. Ook daar de paraboolvorm. Als voorwaarde geldt wel steeds: de verticale stangen moeten onderling gelijke afstanden hebben en de F-vectoren moeten in elk hoekpunt even groot zijn. Bij boogbruggen zijn er nog twee mogelijkheden: het wegdek hangt aan de boog zoals in fig. 1 of staat erop zoals in fig. 2, 5 en 6.

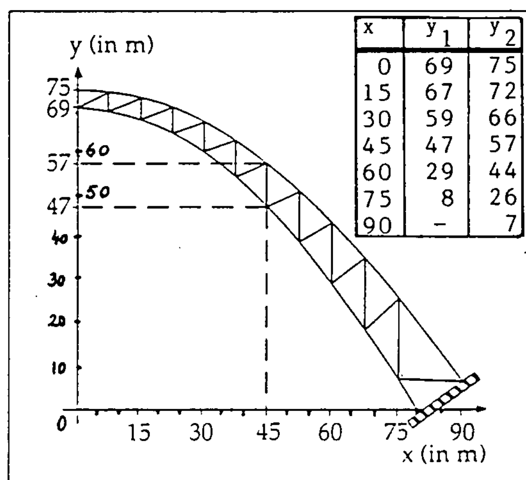
Toepassingen

In figuur 2 staat een foto van een overspanning van de Wupper, noordoostelijk van Keulen. De binnenboog ligt 69 m boven de betonnen fundering op de beide oevers en 107 m boven het water van de rivier. Daarmee is deze brug de hoogste van Duitsland.
De dubbele vakwerkboog bevat verticale en schuine verbindingsstukken. Merk op dat de verticale onderling weer gelijke afstanden hebben. Een precieze opgave van de maten staat in figuur 3.
Uit de gegevens zijn de vergelijkingen voor binnen- en buitenboog te bepalen. Als we de x-as laten samenvallen met het wegdek en de y-as met de as van de kromme, wordt de algemene vergelijking: $y = -ax^2 + b$. Uit de gegeven getallen volgt voor de binnenboog: $a = 0{,}011$; $b = 69$ en voor de buitenboog: $a = 0{,}0089$; $b = 75$.

Lengte van de stangen
In figuur 1 is af te lezen: $CP^2 = b^2 + d^2$; $PQ^2 = b^2 + 9d^2$; $QT^2 = b^2 + 25d^2$. Daarmee zijn bij gegeven kromme de lengten van de afzonderlijke stangen te berekenen. Hebben we eenmaal de vergelijking dan zijn ook de lengten van de verticale staven gemakkelijk uit te rekenen.

Grootte van de vectoren
We kunnen nog verder gaan en de drukkrachten bepalen.
$F_1, F_2 \ldots = \frac{1}{6}G$.
Uit de eerder genoemde gelijkvormigheid volgt dat de drukkrachten evenredig zijn met de staaflengten. Zo is de druk in de staven 3 en 4 het kleinst en in 1 en 6 het grootst.
Als voorbeeld bepalen we, in het geval van figuur 1, de drukkracht in stang CP, uitgedrukt in het gewicht van het wegdek. Vergelijking van de gearceerde driehoeken leert:

$$S_4 : \tfrac{1}{2}F = \sqrt{b^2 + d^2} : d \text{ ofwel } S_4 = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{12d} \cdot G$$



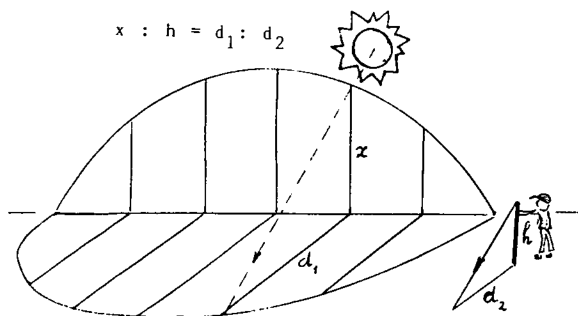
x	y_1	y_2
0	69	75
15	67	72
30	59	66
45	47	57
60	29	44
75	8	26
90	-	7

Figuur 3 Twee parabolen vormen een dubbele boog.

Leerlingenproject

Met behulp van het bovenstaande zal het gelukken om zelf een leerlingenproject te ontwikkelen. Zulk een opzet heeft veel voordelen. De leerlingen maken kennis met een omgevingssituatie, waarbij wiskunde functioneert, en met vragen als:
- waardoor is een parabool bepaald, hoe vind je de vergelijking?
- verschaf jezelf uit werktekeningen en foto's de benodigde gegevens. Of nog beter: meet ze zelf op.
- als een brug te betreden is, kun je de lengte van het wegdek bepalen. Als je dan nog een foto recht van de zijkant kunt maken, zijn meer lengten te bepalen omdat je nu de schaal kent. Wie bouwt een brugmodel op schaal, nadat de zaak is doorgerekend?

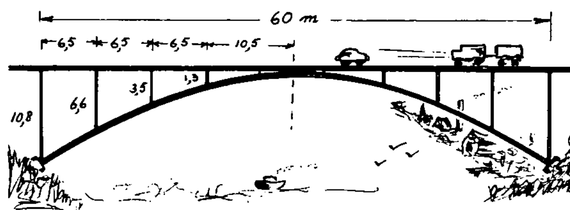
Maar we kunnen ook rechtstreeks via de schaduwmethode de lengte van verticale staven opmeten (fig. 4).



Figuur 4 Bepaling van de staafhoogte x met de schaduwmethode

Ten slotte

Hier nog twee situaties:
1. In figuur 5 wordt de boog gedekt door de vergelijking $y = -0{,}012x^2$ als we de top als oorsprong en de stippellijn als y-as kiezen.
2. Bepaal a bij de binnenboog van figuur 6 uit hoogte (20 m) en halve breedte (50 m). Wij vinden $a = 0{,}005$.
Doe hetzelfde voor de buitenboog met behulp van de gegeven coördinaten.

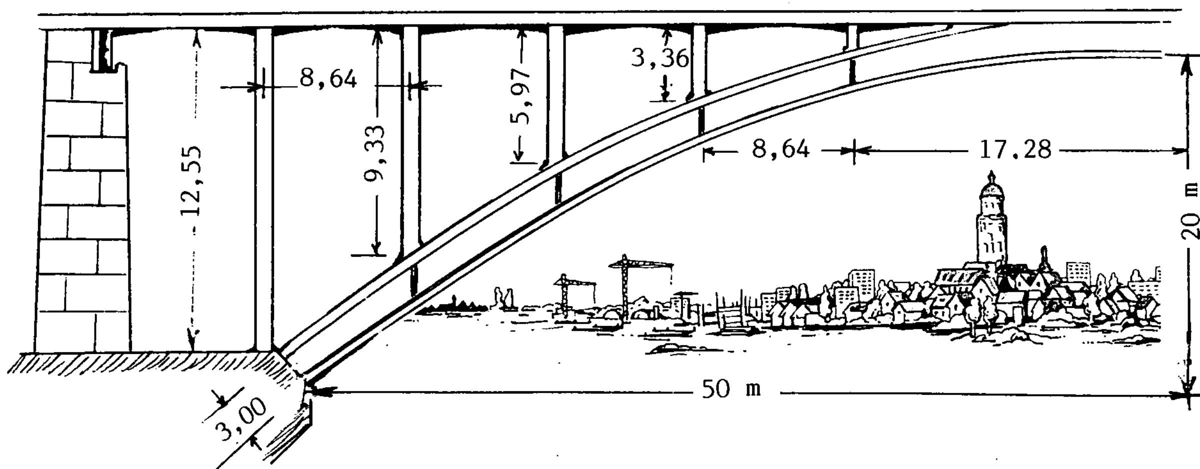


Figuur 5

Opmerkingen

Omdat we niet met fictieve zaken bezig zijn, moeten grootheden van eenheden voorzien worden. We drukken b uit in meter (m), maar hoe zit het met a? Wel, daar hoort m^{-1} of 'per meter' achter. Immers in $y = -ax^2 + b$ moet ax^2 de dimensie meter krijgen.
Opvallend is dat de a-waarden van de brugparabolen veel lager zijn dan bij parabolen uit de schoolboeken.
Dat duidt op wijde parabolen.
Het is voor wiskundigen even wennen om met niet-exacte getallen te werken; in de werkelijkheid gaat het altijd om benaderde waarden.

Literatuur Mathematik lehren/Heft 37



Figuur 6

● **Bijdrage** ● ● ● ●

▶ Lange getallen zelf berekenen

R. Leentfaar

Inleiding

De komst van steeds betere rekenapparatuur en software brengt met zich mee, dat velen nieuwe gebieden gaan verkennen. Daarbij springt de toenemende belangstelling voor *lange getallen* in het oog.

Om enig inzicht te krijgen in het werken met lange getallen worden in dit artikel een tweetal voorbeelden behandeld. Eerst de betekening van 100! en daarna de berekening van een groot aantal cijfers achter de komma van het getal e. Aangezien $\log 100! = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log 100 = 157{,}97$ bestaat het getal 100! uit 158 decimale cijfers. In de berekening werken we met 160 cijfers.
En omdat $e = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots$ krijgen we van e zeker diezelfde 158 significante cijfers als we de berekening van e afbreken na de term met 1 / 100!

(Een opmerking over convergentie is hier wel op z'n plaats: na 100! schuift de kop van elke volgende op te tellen term minstens 2 plaatsen naar rechts, waardoor het aantal reeds goede cijfers steeds met minstens twee toeneemt. Daarmee is ook duidelijk dat op elk moment de positie van de kop van de nieuw op te tellen term de plaats aangeeft tot waar het aantal juiste cijfers loopt).

We willen echter minstens 160 juiste significante cijfers hebben en gaan daarom door tot en met de term met 102!
Doordat we in dit laatste geval zelfs met 164 decimalen werken worden cumulerende afrondfouten royaal opgevangen.

De berekening van 100 !

Omdat we met 160 decimalen te maken hebben, verdelen we deze (enigszins willekeurig) in 40 groepen van 4 cijfers. Elke groep wordt gerepresenteerd door een tabel-element (een 'vak'). Het is wel aardig om op te merken dat we in feite in het 10000-tallige stelsel rekenen. De startsituatie is:

	3	2	1
...	0000	0000	0001

Van rechts naar links worden de vakken *allemaal* eerst met 2, daarna met 3 ... 100 vermenigvuldigd. Om niet allemaal nullen mee te vermenigvuldigen wordt bijgehouden hoeveel vakken er 'in gebruik' zijn. Bij de aanvang is dat AANTAL = 1. Na vermenigvuldiging met 11 is de situatie als volgt:

	3	2	1
...	0000	3991	6800

AANTAL = 2

Voor vak 2 verloopt de berekening bij het vermenigvuldigen met 12 nu als volgt: $12 * 3991 + 8$ (die was te onthouden van $12 * 6800) = 47892 + 8 = 47900 = 7900$ opschrijven en 4 onthouden. Als er aan het eind van de cyclus waarin alle vakken vermenigvuldigd worden (b.v. met 12) nog iets te onthouden is, wordt een nieuw vak in gebruik genomen (en AANTAL met 1 opgehoogd).
Aan het begin van de cyclus (voor behandeling van het eerste vak) wordt het te onthouden getal op nul gesteld. Het volgende GW-BASIC-programma spreekt voor zichzelf. Zoals gebruikelijk in dit soort gevallen is de helft van het programma gewijd aan het verkrijgen van een redelijke uitvoer.

```
100 DIM VIERTAL (40)
110 LET VIERTAL (1) = 1
    '1-faculteit is 1
120 FOR INDEX = 2 TO 40: LET VIERTAL (INDEX) = 0:
    NEXT INDEX
130 LET AANTAL = 1
    'Er is 1 'vak' in gebruik
140 FOR FACTOR = 2 TO 100
150  LET ONTHOUD = 0
     'Beginsituatie
160  FOR VAK = 1 TO AANTAL
170   LET VIERTAL (VAK) = VIERTAL (VAK) * FACTOR
      + ONTHOUD
180   LET ONTHOUD = INT (VIERTAL (VAK)/10000)
190   LET VIERTAL (VAK) = VIERTAL (VAK)-
      ONTHOUD * 10000
200  NEXT VAK
210  IF ONTHOUD< >0 THEN LET AANTAL =
     AANTAL + 1:
     LET VIERTAL(AANTAL) = ONTHOUD
     'Neem nieuw vak in gebruik
230  GOSUB 260
240 NEXT FACTOR
250 GOTO 390
260 REM ***** subroutine faculteit afdrukken *****
270 PRINT
280 LET GETAL$ = STR$(FACTOR): LET GROOTTE =
    LEN(GETAL$) - 1
290 PRINT RIGHT$(GETAL$,GROOTTE); '!='; SPC
    (8-GROOTTE);
300 FOR INDEX = AANTAL TO 1 STEP -1
310  IF AANTAL < > INDEX AND
     (AANTAL-INDEX)/10 = INT
     ((AANTAL-INDEX)/10) THEN PRINT: PRINT SPC(10);
320  LET TEKST$ = STR$ (VIERTAL (INDEX))
330  LET BREEDTE = LEN (TEKST$) - 1
340  PRINT SPC (1); STRING$ (4-BREEDTE, '0');
     RIGHT$ (TEKST$, BREEDTE);
350 NEXT INDEX
360 PRINT
370 FOR WACHT = 1 TO 1000  NEXT: WACHT
380 RETURN
390 PRINT
400 END
```

Van de uitvoer van het programma ziet het laatste gedeelte er dan als volgt uit:

```
100! = 0093 3262 1544 3944 1526 8169 9238 8562 6670 0490
       7159 6826 4381 6214 6859 2963 8952 1759 9993 2299
       1560 8941 4639 7615 6518 2862 5369 7920 8272 2375
       8251 1852 1091 6864 0000 0000 0000 0000 0000 0000
```

Het berekenen van 160 decimalen achter de komma van e

$e = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/10! + 1/11! + \ldots + 1/102!$

Daarbij krijgen we de term met 1/11! door de vorige term 1/10! nog (extra) door 11 te delen. We houden een SOM bij (van de termen tot nu toe) en een TERM die de volgende op te tellen term bevat. De 2 voor de komma blijft buiten beschouwing (d.w.z. tot aan het antwoord). De startsituatie is (ook hier rekenen we in feite weer in het 10000-tallige stelsel, maar nu achter de komma):

	1	2	3		40
SOM	0000	0000	0000	...	0000
TERM	5000	0000	0000	...	0000

Die 5000 stelt 0,5000 ... en dus 1/2! voor. Voor 2 tot en met 102 gebeurt nu het volgende:

– TERM wordt bij SOM opgeteld (dat gaat net zo als bij 100!).

– In de getekende situatie moet nu de term met 3! berekend worden. TERM moet dus door (2 + 1 =) 3 gedeeld worden. Dat gaat als volgt: van links naar rechts wordt elk vak door 3 gedeeld. Het quotiënt wordt teruggeplaatst in het vak. De rest (* 10000) wordt doorgeschoven naar het eerstvolgende vak (direct rechts ervan). In vak 41, dat als overloopvak dient, wordt op de juiste wijze afgerond. Omdat TERM snel kleiner wordt, en het geen zin heeft de voorste nullen ook mee te delen, wordt nu in AANTAL het nummer van het *eerste* vak bijgehouden, dat ongelijk is aan nul. Het volgende programma spreekt verder weer voor zichzelf.

```
100 DIM SOM (41), TERM (41)
    '41 is overloopvak
110 LET SOM (1) = 0: LET TERM (1) = 5000
    'Begin met 1/2!
120 FOR I = 2 TO 41: LET SOM (I) = 0: LET TERM(I) = 0:
    NEXT I
130 LET AANTAL = 1
    '1e vak < > 0
```

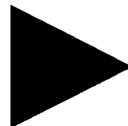
```
140 FOR VOLG = 2 TO 102
150  LET ONTHOUD = 0
     'Beginsituatie
160  FOR VAK = 41 TO AANTAL STEP -1
     'Som: = som + term
170   LET SOM(VAK) = SOM(VAK) + TERM(VAK) +
      ONTHOUD
180   IF SOM(VAK)> =10000 THEN
     LET ONTHOUD = 1:
      LET SOM(VAK) = SOM(VAK)-10000 ELSE
      LET ONTHOUD = 0
190  NEXT VAK
200  IF ONTHOUD = 1 THEN LET SOM (AANTAL - 1) =
     SOM(AANTAL - 1) + 1
210  FOR VAK = AANTAL TO 40
     'Maak nieuwe term
220   LET QUOT = INT(TERM(VAK)/(VOLG + 1))
230   LET REST = TERM(VAK) - (VOLG + 1)*QUOT
240   LET TERM(VAK) = QUOT
250   LET TERM(VAK + 1) = TERM(VAK + 1) +
      REST * 10000
260  NEXT VAK
270  LET TERM (41) = INT(TERM(41)/(VOLG + 1) + .5)
280  IF TERM (AANTAL) = 0 THEN LET AANTAL =
     AANTAL + 1
290  GOSUB 320
300 NEXT TERM
310 GOTO 440
320 REM *** subroutine afdrukken ***
330 PRINT
340 PRINT 'e is na de term met 1/'; VOLG; '! geworden: 2.';
350 FOR INDEX = 1 TO 40
360  IF (INDEX-1)/10 = INT((INDEX - 1)/10) THEN
     PRINT
370  LET TEKST$ = STR$(SOM(INDEX))
380  LET BREEDTE = LEN(TEKST$) - 1
390  PRINT SPC(1); STRING$(4-BREEDTE, '0');
     RIGHT$(TEKST$, BREEDTE);
400 NEXT INDEX
410 PRINT
420 FOR WACHT = 1 TO 1000: NEXT WACHT
430 RETURN
440 PRINT
450 END
```

Het laatste gedeelte van de uitvoer van het programma ziet er als volgt uit:

```
e is na de term met 1/102! geworden: 2.
7182 8182 8459 0452 3536 0287 4713 5266 2497 7572
4709 3699 9595 7496 6967 6277 2407 6630 3535 4759
4571 3821 7852 5166 4274 2746 6391 9320 0305 9921
8174 1359 6629 0435 7290 0334 2952 6059 5630 7381
```

Besluit

Aan de orde zijn geweest de vermenigvuldiging van een lang getal met een kort getal (bij de berekening van 100!) en de deling van een lang getal door een kort getal (bij de berekening van de decimalen van e). Verder werden er lange getallen opgeteld. Het vermenigvuldigen en delen van twee lange getallen is wel wat lastiger. Toch zal het de lezer niet moeilijk vallen met de voorbeelden van dit artikel in het achterhoofd de principes ervan te ontdekken. Zeker niet als hij/zij op papier nog eens een flinke vermenigvuldiging of deling uitvoert en daarbij de cijfers *in groepjes* (bijv. van vier) verdeelt. Op zich een leuk onderzoeksterrein en de moeite waard om ook in het reken- en wiskunde-onderwijs aandacht aan te besteden!



Verschenen

Petrina, D, Ya (e.a.): *Mathematical Foundations of Classical Statistical Mechanics*; Gordon and Breach; $ 95.00; 335 blz.

Uitgaande van de Bogolyubov-vergelijkingen worden evenwichts- en niet-evenwichtstoestanden van oneindige klassieke statistische systemen bestudeerd. De mathematische problemen die hierbij naar voren komen worden opgelost m.b.v. de thermodynamische-limiet-methode.

Szekely, G. J.: *Paradoxa*; Akademiai Kiado Budapest; $ 28.00; 240 blz.

Deze bundel bevat een bloemlezing van ruim 100 paradoxen uit het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek. Elke paragraaf bevat een historische inleiding bij de te bespreken paradox, een presentatie van de paradox en een uitleg. De paragraaf wordt afgesloten met een literatuurverwijzing.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ En Cindy dan?

Theo Obdeijn

In de Examenbundel 1990 voor lbo/mavo C/D (experimentele examens en oefenexamens) staat oefenexamen C-niveau nummer 1. De opgaven 29 t/m 38 van dit oefenexamen horen bij elkaar en spelen in de context Gymzaal.
Het wiskunde G-cluster van de Radboudmavo in Oldenzaal bestaat uit 8 meisjes en 11 jongens. De groep krijgt les op D-niveau. Ze hebben dit C-oefenexamen gemaakt en kunnen duidelijk meer aan. Daarom heb ik vraag 38 als startpunt gekozen voor een wiskundeavontuur van drie kwartier.
De gang van zaken in dit lesuur is hieronder beschreven, de betreffende opgave is op de volgende bladzijde als werkblad afgedrukt.
Naar aanleiding van de discussie in de klas is een aanvullend werkblad ontworpen, zie bladzijde 49 van dit nummer. Met dit tweede werkblad is nog geen ervaring opgedaan.

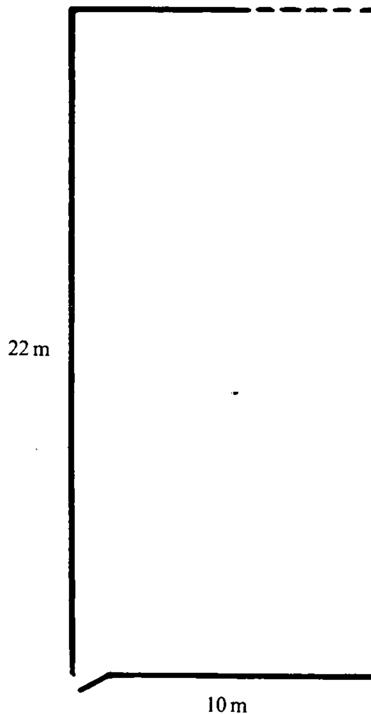
Het eerste probleem dat aandacht vraagt, is: 'Hoeveel ruimte heeft één persoon nodig?'. 'Het is een kring!'. 'Hoe groot?' 'De diameter is ongeveer je lichaamslengte' weten enkelen.
Bij het pakket 'Statistiek' voor W12/16 hebben we een stamblad gemaakt van onze lichaamslengten. Daarom weten we dat Cindy 1.56 m meet en dat de anderen 1.75 m of langer zijn. We spreken af dat elke 'zwaaicirkel' een diameter van 2 m moet hebben. (Nou ja, die van Cindy kan wel een tikkie kleiner).
Ik heb kopieën van de plattegrond van de gymzaal gemaakt. Ook heb ik ronde schijfjes meegebracht die met z'n vijven precies in de breedte van de plattegrond passen. Er zijn er voldoende van, maar niemand gebruikt ze.
Wel komt: '11 rijen van 5 is 55'.
Gelukkig blijft het gruwelijke 'oppervlakte cirkel is $1^2 \times \pi \approx 3.14 m^2$, oppervlakte zaal is 220 m^2, dus $220 : 3.14 \approx 70.06$ personen' vandaag achterwege.
Ik heb een sheet gemaakt van de plattegrond en ik leg daar nu twee rijen schijfjes op: een rij van 5 en een rij van 4, op de manier van de tweede figuur van bladzijde 49. Ik vraag: 'Kan ik, als ik zo doorga, méér of minder dan 55 personen kwijt?'.
Er wordt gewikt, gewogen en weerlegd.
Minder: 'Je mist telkens 1 persoon per 2 rijen. Dat is 5½ totaal. Als er nu één rij meer in kan, dan zijn dat 4 of 5 mensen. En je mist er 5½!'.
Méér: 'Als je met een zakje Smarties schudt, komt er bovenin ruimte. Dat gaat vanzelf'. De discussie spitst zich toe op het probleem: '9 cirkels op een rechthoek van 10 m bij ... tja. Hoe groot is tja?'
Ik zet de leerlingen op het spoor met enkele hulplijntjes in de figuur, zie bladzijde 49. Al snel komt nu: '$1 + \sqrt{3} + 1$ m. Dat is minder dan 4. Ongeveer 3.73 m. Dat kan 5.89 keer op 22 m.' Moet je nu naar beneden afronden, op 5.5? En is die laatste dan een rij van 4 of van 5 mensen?
Of mag je naar boven afronden, op 6?
Iemand zegt: 'En Cindy dan?'. 'Dus 6 mag' zegt een ander. Dat geeft $6 \times 9 = 54$ personen. Toch altijd nog 1 minder dan 55!
De les is bijna om en niemand ziet dat, ook zonder Cindy, voor 12 rijen minder ruimte nodig is dan 6 maal de ruimte voor 2 rijen.

Over de auteur:
Theo Obdeijn is adjunct-directeur aan de Radboudmavo te Oldenzaal. Hij is sinds 1981 part-time medewerker bij de SLO en lid van het team W 12/16. De Radboudmavo is A-school in het project W 12/16. De school kent vanaf 1990 een afwijkend wiskunde C/D-examen.

● Werkblad ●

▶ Grondoefeningen (1)

Hieronder zie je de plattegrond van een gymzaal die 10 meter breed, 22 meter lang en 6 meter hoog is. Hij is op schaal getekend.
Voor de grondoefeningen moet je altijd een plaats zoeken in de zaal, zodat je van niemand last hebt. Om dat te controleren, spreid je je armen zijwaarts en zo staande draai je één keer rond. Raak je niemand, dan sta je goed.
De gymleraar denkt erover iedere morgen 20 minuten ochtendgymnastiek te gaan doen met iedereen die zin heeft.



38. Hoeveel personen kunnen er ongeveer meedoen? Geef een toelichting.

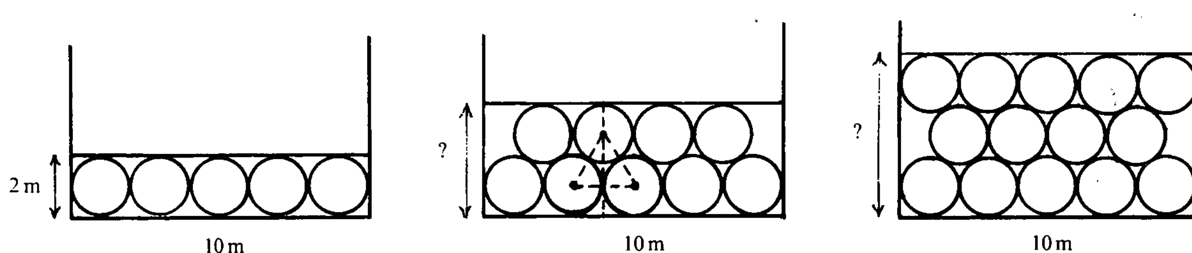
Uit: experimenteel oefenexamen lbo/mavo C-niveau nummer 1

● Werkblad ●

▶ Grondoefeningen (2)

De gymleraar zegt: 'Om iedereen voldoende ruimte te geven, moet per persoon een cirkel met een diameter van 2 meter vrij gehouden worden. Er passen dan precies 11 rijen van 5 cirkels in de zaal, dat is in totaal 55. Maar ik moet zelf ruimte hebben om de oefeningen voor te kunnen doen, dus er kunnen 54 personen meedoen'.

Een leerling heeft een ander idee: 'We maken afwisselend rijen van 5 en van 4 personen. Per twee rijen is dat wel één persoon minder, maar de rijen kunnen dan een beetje in elkaar geschoven worden en zo komt het in totaal misschien toch gunstiger uit'. In de onderstaande figuren zie je wat de leerling bedoelt.



a. De lengte van de rechthoek die door één rij van 5 cirkels in beslag genomen wordt, is 2 m. Hoe lang is de rechthoekige ruimte die voor twee rijen met in totaal 9 cirkels nodig is? (Minder dan 4 m, dat is duidelijk!)
Gebruik de hulplijntjes die in de middelste figuur aangegeven zijn.

b. Wat is nu de totale lengte van drie rijen? Teken zelf de nodige hulplijntjes.
En hoe lang is een rechthoek met vier rijen? En met vijf rijen?

c. Kunnen er op deze manier meer dan 54 personen met de ochtendgymnastiek meedoen? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Het nieuwe leerplan 12-16 (3)

Francis Meester, Joop van Dormolen

Het nieuwe programma en de aansluiting[1]

In oktober 1990 verscheen het eerste concept Eindexamenprogramma mavo/lbo C/D. Ongeveer 1200 leerkrachten hebben een exemplaar ontvangen op de eerste regionale bijeenkomst in oktober 1990.
Op de tweede bijeenkomst in november kon men reageren en vragen stellen. Dat waren er heel wat. Eén van de grote punten van zorg van docenten is de vraag naar de aansluiting van het nieuwe programma met het vervolgonderwijs. Vanzelfsprekend is dat niet alleen een zorg van docenten, maar ook van de ontwerpers van het programma en van de COW. Toch vonden docenten de gegeven antwoorden lang niet altijd bevredigend. Daarom is het goed nog eens wat zaken uit elkaar te halen en informatie te geven over de huidige stand van zaken[2].

Het conceptprogramma mavo/lbo C/D

Hoewel het gele boekwerk van oktober 1990 duidelijk *Concept examenprogramma mavo/lbo C/D* heet, lazen mensen hier toch nog al eens het onderbouwprogramma havo/vwo in. Dat is echter hetzelfde. De COW heeft verschillende opdrachten. Een ervan is het ontwerpen van een nieuw examenprogramma mavo/lbo C/D. Drie andere zijn het ontwerpen van leerplannen voor mavo/lbo, voor onderbouw havo en voor onderbouw vwo. Vanzelfsprekend moeten de leerplannen veel overeenkomsten hebben, maar het was en is duidelijk, ook voor de ontwerpers, dat ze niet hetzelfde kunnen zijn.
In oktober 1990 waren er nog geen leerplannen voor havo en vwo. Trouwens ook niet voor mavo en lbo. Een eerste versie van de leerplannen, ook voor lbo-A en -B, is op de COW-vergadering van juni 1991 ter bespreking. Deze worden beschreven in het zogenaamde *Vijf-trajectenboek*: lbo-B, mavo/lbo-C, mavo/lbo-D, onderbouw havo en onderbouw vwo[3]. Het zal een uitgebreide en gedetailleerde beschrijving van de vijf leerplannen bevatten. Vooral voor hen die niet zeer nauw bij het ontwikkelen betrokken zijn, zal dit wellicht wat onoverzichtelijk zijn door de vele details. Daarom zal op de komende bijeenkomsten in oktober en november 1991 een samenvatting uitgedeeld worden. Voor belangstellenden zal het *Vijf-trajectenboek* beschikbaar zijn.

De aansluiting met het havo

De eerstegraders waren bezorgd: hoe moet het nieuwe leerplan ooit voldoende voorbereiding geven voor havo-B? Met mavo-D moet een leerling, die wiskunde als examenonderdeel heeft, immers kunnen overstappen naar het havo met wiskunde?
De docenten, net enkele maanden met hun leerlingen bezig met de nieuwe programma's voor havo-A en -B, hadden de schrik van havo-B en beseften maar al te goed hoeveel vaardigheden leerlingen paraat moeten hebben voor dit zware programma. Maak mavo-D niet te licht, zeiden zij, anders komen er grote aansluitingsproblemen.
Naar ons idee zit hier niet het grootste probleem van de vernieuwing. Een dalend deel van de examenkandidaten stapt van het mavo over naar het havo. Dat is nu ongeveer 18%, waarvan naar schatting de helft, zeg 9% van het totaal, wiskunde in het pakket heeft. Deze laatste groep moet kiezen tussen wiskunde-A of -B. We stellen dat maximaal 5%

voor wiskunde-B zal kiezen. Dat is een gering percentage in verhouding tot de hele populatie. Er zal nu afgewogen moeten worden of voor de hele groep het programma overladen moet worden terwille van het relatief kleine aantal dat op het havo wiskunde-B wil kiezen[4].
Docenten noemen terecht het verwachte tekort aan algebraïsche vaardigheden. Maar er is nog wat anders aan de hand. Wat niet voor iedereen duidelijk was, is de grote voorsprong, die toekomstige ex-mavo-leerlingen hebben (en ook leerlingen uit de onderbouw van het havo) in de ruimtemeetkunde vergeleken met hen die nu en de komende vier, vijf jaar naar de bovenbouw van het havo gaan.
Natuurlijk moet er op het terrein van de algebra het nodige voorwerk gedaan worden, maar laten we eerlijk zijn: hoeveel tijd neemt het eindeloos oefenen in klas twee en drie nu niet in beslag? En wat is het resultaat? De leerkracht van havo-4 zucht: 'Wat ze geleerd hebben? Ik weet het niet, maar ik moet helemaal opnieuw beginnen.'
De vermindering van de inhouden voor algebra in mavo-D is niet zozeer een gevolg van het schrappen van onderdelen omdat die niet in de nieuwe ideologie van realistisch wiskunde-onderwijs passen. Er is ook en vooral gekeken naar de verworvenheden van didactische ervaring en onderzoek. Eén van de resultaten daarvan is, wat eigenlijk iedere ervaren docent ook wel weet, dat leerlingen veel meer gebaat zijn bij een lange en didactisch goed onderbouwde voorbereiding van elementaire begrippen en vaardigheden, dan bij veel oefenen met sommetjes waarvan veel leerlingen niet begrijpen wat ze eigenlijk aan het doen zijn.
Daarom zou het wel eens heel effectief kunnen zijn om leerlingen in havo-B gericht een aantal technieken te onderwijzen waarvoor in de jaren daarvoor een goede basis is gelegd. We zijn ervan overtuigd, dat daarvoor in de bovenbouw van het havo ook ruimte is, doordat er veel tijd bespaard wordt op de ruimtemeetkunde.
Naar de overstap van het mavo naar havo-wiskunde-A werd door de critici zonder zorgen gekeken. Men geloofde, en wij met hen, dat mavo-leerlingen aanzienlijk beter voorbereid zullen zijn, dan nu het geval is. Sommigen geloven zelf dat er op den duur verschuivingen in het havo-A programma zullen gaan optreden.

De aansluiting met het mbo

We schreven al, dat het aantal leerlingen dat na het mavo naar het havo gaat dalend is. Dat is ten gunste van het mbo. In 1989 koos 72% van de mavoleerlingen een vervolg op het mbo.
Voor het lbo liggen deze cijfers anders. In de volgende tabel is de uitstroom voor een paar groeperingen aangegeven.[5]

Uitstroom in 1989 uit enige sectoren van het lbo en mavo met diploma

	naar mbo	naar ander onderwijs	geen voltijd-onderwijs
Jongens lto	22% (6800)	12% (3900)	66% (21200)
Meisjes lhno	38% (8000)		62% (12800)
Jongens lao	49% (2800)		51% (3600)
Totaal mavo	72% (50900)	havo/vwo 18% (12500)	8% (5500)
		ander 2% (1500)	

Eigenlijk kunnen we niet spreken over *het* mbo. Er zijn veel opleidingen met enorme verschillen aan behoefte aan wiskundige voorkennis. Het mdgo[6], waar veel lhno-leerlingen naar toe doorstromen vraagt in de toelatingseisen geen wiskunde. Wel wordt er in de verschillende richtingen van het mdgo veel gerekend. Het nieuwe programma bereidt daar uitstekend op voor. Veel beter dan nu het geval is.
Om bij het mto en het mlo[7] binnen te komen is wiskunde-C nodig, maar ook daar wordt heel verschillend met de veronderstelde wiskundige voorkennis omgegaan. Heel vaak wordt in het eerste jaar de leerstof van wiskunde-C – weliswaar in hoog tempo – nog eens helemaal behandeld.
De zaak ligt echter nog ingewikkelder. In de eerste plaats is wiskunde niet op elke mbo-opleiding een zelfstandig vak. In de tweede plaats vereist elke vorm van beroepsopleiding een andere manier van omgaan met wiskunde, ook als wiskunde wel afzonderlijk onderwezen wordt.
Hoe het ook zij, in elk geval is het gewenst, dat leerlingen op het lbo de wiskunde krijgen aangeboden op een manier, die past bij de bedoelde beroepsgroep. Dat gebeurt nu ook al voor een deel, maar door de nadruk op wiskunde vanuit contex-

ten zal dat in de toekomst veel beter mogelijk zijn. In de conceptvoorstellen gebeurt dit met name voor het C-programma. Het D-programma bevat meer algebraïsche vaardigheden en toepassingen in de wiskunde zelf.

Dit onderscheid heeft consequenties.
Het verschil in niveau en inhoud tussen het C- en het D-programma wordt groter dan nu het geval is. Dat zou betekenen, dat in het mavo, waar dikwijls pas kort voor het centraal schriftelijk eindexamen gekozen wordt voor het C- of het D-examen, meer gedifferentieerd moet worden.
Voor het lbo geldt dit probleem minder. Er zijn slechts enkele procenten leerlingen met een D-examen op het lbo. Maar helemaal zonder moeilijkheden zal het niet worden, omdat er dikwijls B/C-groepen leerlingen zijn.
Wat dit allemaal voor consequenties zal hebben voor de dagelijkse praktijk van het onderwijs is nu moeilijk te overzien. Gaat het leraren lessen kosten, of zal er nog meer dan nu gedifferentieerd binnen klassenverband gewerkt gaan worden?

Niet alles kan. We kunnen niet vanuit het voortgezet onderwijs de wiskundeprogramma's van het mbo, in het bijzonder van het mto, veranderen. Anderzijds zijn we van mening, dat het voortgezet onderwijs zich ook niet klakkeloos moet richten op de vigerende toelatingseisen van het mto. Ook de vervolgopleidingen zullen goed moeten nagaan wat er aan het veranderen is bij het mavo en het lbo. Er is daarom ook al overleg gaande met mensen van het mbo om gezamenlijk een uitvoerig voorlichtingsprogramma op te stellen en samen met het Team 12-16 uit te voeren.

Samenvatting

Het geheel van conceptplannen overzien kunnen we samenvattend opmerken:
Mavo-C: Slechte voorbereiding voor het havo; behoorlijke voorbereiding voor met mbo, zij het dat mavo-leerlingen geen specifiek op het beroep gerichte contexten krijgen.
Mavo-D: Uitstekende voorbereiding voor havo-A en voor mbo. Enige twijfel voor het havo-B-programma, waar vermoedelijk wat uitwisseling tussen algebraïsche technieken en ruimtemeetkunde zal moeten plaatsvinden.
Lbo-C: Slechte voorbereiding voor het havo; uitstekende voorbereiding voor het mbo.
Lbo-D: Komt heel weinig voor. Voor het havo geldt hetzelfde als bij de mavo-leerlingen. Voor het mbo lijkt de voorbereiding uitstekend.

Noten

1 Twee vorige artikelen van deze serie zijn verschenen in Euclides 66, 90/91, no. 7 en 8.
2 Op het moment dat dit artikel geschreven werd was het 28 juni 1991.
3 Ter voorbereiding is als een soort kladversie in maart 1991 een zogenoemd *Netwerk* verschenen als eerste aanzet voor het *Vijf-trajectenboek*. Dit was vooral bedoeld als informatie aan uitgevers en auteursgroepen en aan de *COW* om een eerste indruk te krijgen van de omvang en inhoud van de programma's.
4 Een soortgelijk probleem was er ook bij het vaststellen van de examenprogramma's voor het havo in verband met hen die over willen stappen naar het vwo. Toen is gekozen voor een niet-drempelloze overgang, teneinde overlading op het havo tegen te gaan.
5 Merk op, dat hier maar een paar sectoren van het lbo genoemd worden en dat van de mavo-uitstroom niet vermeld wordt hoeveel leerlingen wiskunde nodig zullen hebben in hun vervolgopleiding.
6 mdgo = middelbaar diensten- en gezondheidsonderwijs.
7 mlo = middelbaar laboratorium onderwijs.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ Het beroep van wiskundige (1)

G. Y. Nieuwland

Een moeizame aangelegenheid

Met het beroep van wiskundige wil het nog steeds niet echt lukken. Volgens een recent onderzoek van de Universiteit van Amsterdam is beroepsperspectief sinds het eind van de jaren zeventig weer een belangrijk motief bij de studiekeuze geworden. De opleidingsinstituten voor de wiskunde hebben dat geweten: de gevolgen van die heroriëntatie ondervinden zij al jaren op pijnlijke wijze in hun studentenaantallen. Natuurlijk zijn bij die teruggang nog wel andere factoren aan te wijzen, maar bij een helder en aantrekkelijk wiskundig beroepsbeeld was het vast wel anders gegaan. Zulks wordt althans gesuggereerd door het relatief succes van de wiskundeafdelingen van de technische universiteiten, die voor het grootste deel hun instroom nog redelijk op peil hebben weten te houden. Beter dan de universitaire concurrentie slaagden zij erin bij de doelgroep de reputatie op te bouwen precies dat soort wiskunde aan te bieden *waar je wat mee kan doen.* Tot welk deel van de arbeidsmarkt deze veelbelovende onderdelen van onze discipline dan wel toegang geven, daarover blijkt bij navraag onder de instromers toch weer niet zoveel duidelijkheid te bestaan. Erger is dat, zoals aanstonds zal blijken, die duidelijkheid bij de betrokken instituten niet veel groter is. Maar eerst, ter vermijding van misverstanden: met de *werkgelegenheid* voor wiskundigen is niets mis. Afgestudeerden in de wiskunde van de klassieke universiteiten vinden evengoed als hun collega's van de technische universiteiten met alleszins redelijke snelheid een baan – maar de beeldvorming is een andere.

Voor de aanstaande studenten – en hun raadgevers – lijkt die beeldvorming, veel meer dan de werkelijkheid van het wiskundig beroep, bepalend. Dat is hun moeilijk kwalijk te nemen, want afgezien van het globale werkgelegenheidscijfer is bijvoorbeeld over de verdeling van afgestudeerde wiskundigen over het beroepenspectrum weinig bekend dat de status van ruwe schatting te boven gaat. Misschien dat de lerarenopleidingen precies weten waar hun afgestudeerden terecht komen, maar de Visitatiecommissie Wiskunde & Informatica van de Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten moest in 1989 constateren dat in ieder geval de faculteiten op dat punt nagenoeg in het duister tasten. Het Wiskundig Genootschap is inmiddels, in navolging van een soortgelijk initiatief van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging, met een kwantitatief onderzoek begonnen.

Overigens, is wiskundige eigenlijk wel een beroep? De vraag kan tot lange discussies aanleiding geven, indien alle mogelijkheden worden uitgeput van de omstandigheid dat een wiskundige (iemand met wiskundige kwalificaties) lang niet altijd een wiskundige (iemand met een wiskundig gekwalificeerde werkkring) is. Maar, zoals verderop zal blijken, ook als die terminologische knoop is ontward blijft toch nog een cruciale vraag open.

Mijn woordenboek geeft onder het lemma beroep: ambacht, werkkring, wat ik als twee verschillende aspecten ervaar. In verband met de wiskunde ligt het voor de hand het woord beroep te gebruiken in de zin van het Engelse *profession*: een *geleerd* beroep met een graad van maatschappelijke zichtbaarheid, blijkend uit enige mate van organisatie en erkenning.

Het kan geen kwaad met enkele opmerkingen vooraf enig historisch perspectief in de discussie aan te brengen, want dat aspect draagt in belangrijke mate bij tot de beeldvorming. Anders dan gebruikelijk, geef ik daarbij betrekkelijk weinig aandacht aan de beroepsuitoefening van wiskundigen

werkzaam aan scholen of universiteiten, omdat die hun maatschappelijke zichtbaarheid meer aan hun docentschap dan aan hun wiskundige habitus ontlenen.

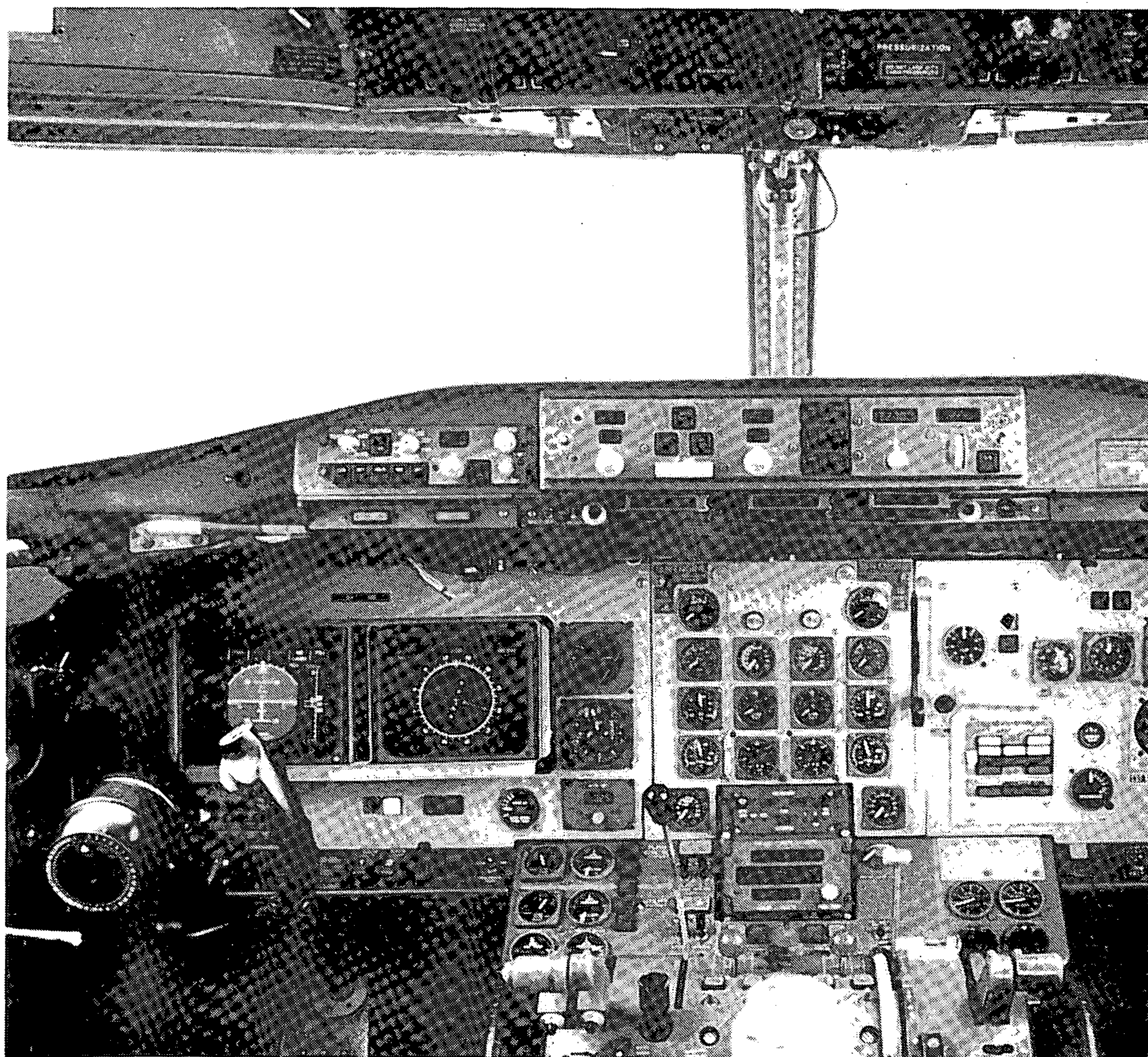
Wiskundige bezigheden aan de Nijl en elders

Volgens overlevering komt de meetkunde voort uit de bezigheden van Egyptische belastinggaarders, die jaarlijks oppervlaktebepalingen dienden uit te voeren van de stukjes landbouwgrond langs de Nijl die na de overstroming van vorm waren veranderd. Een soortgelijke wiskundige beroepsinkleuring wordt in de vroege geschiedenis van ons werelddeel aangetroffen overal waar handel en scheepvaart worden bedreven: dan is er altijd wel wiskundig inzicht nodig bij de bepaling van de inhoud van wijnvaten, van het volume van een scheepslading, van een koers op zee of – in een later stadium van de ontwikkeling – van een rentevergoeding voor een leverantie op krediet. Zulke activiteiten riepen al vroeg een vorm van echte wiskundige beroepsorganisatie op. Met een relict daarvan maakte ik vorig jaar kennis, toen de *Mathematische Gesellschaft in Hamburg* in de genoemde havenstad zijn derde eeuwfeest vierde. (Deze oudste nog bestaande wiskundige vereniging is de moeder van ons meer dan tweehonderd jaar oude Wiskundig Genootschap). De MGH kwam voort uit de beroepsorganisatie van de rekenmeesters, die ten behoeve van de kooplieden de nodige rekenregels voor de bepaling van inhouden, oppervlakten en gewichten onderwezen. Ook in Amsterdam heeft een traditie bestaan van lieden, die met het geven van rekenonderwijs met een commerciële inslag hun brood verdienden – hoewel het meen ik niet zo is dat juist dezen bij de stichting van het WG betrokken waren.
Aan het begin van de negentiende eeuw ontstaan de eerste moderne wiskundige professionele organisaties, die van de verzekeringswiskundigen (actuarissen) en van de landmeters.
Rond het begin van onze eeuw worden de eerste niet-universitaire wetenschappelijke en technologische overheidsinstituten opgericht, waarin echter voor de wiskunde zelden een afzonderlijke organisatorische plaats werd ingeruimd. Een uitzondering hierop vormen uit de aard der zaak de instituten voor de statistiek, die in diverse landen ook in deze periode tot stand komen – ons Centraal Bureau voor de Statistiek werd al vroeg (in 1899) opgericht. Het gebruik van statistiek in het bedrijfsleven op grote schaal en daarmee de vorming van een grote wiskundige beroepsgroep dateert echter van meer dan een halve eeuw later. Een indicatie van de omvang in Nederland anno 1991: de Vereniging voor Statistiek telt rond 1200 leden, zij organiseert behalve de statistici ook de besliskundigen, de econometristen en andere beoefenaars van wat inmiddels bedrijfswiskunde is gaan heten. Ter vergelijking: het WG is ongeveer even groot en omvat de meeste universitaire wiskundigen, veel leraren en een aantal personen werkzaam bij de wiskundeafdelingen van de grote technologische instituten en de bedrijven. De VvS verenigt in vergelijkbare aantallen leden met een academische opleiding en met een praktijkopleiding, zij fungeert ook overigens – meer dan het WG – als een echte professionele organisatie.
Na de tweede wereldoorlog kwam behalve deze *business mathematics* een groot aantal andere toepassingen van wiskunde in de industriële sfeer tot ontwikkeling, die telkens aan het toepassingsgebied een eigen subcultuur ontleenden. De volgende opsomming is verre van uitputtend: systeem- en regeltheorie, signaalverwerking, beeldanalyse, tomografie, netwerktheorie, modellering van geïntegreerde schakelingen, foutenverbeterende codes, continuüm-mechanica en diverse vormen van *computational mathematics.* De wiskundige basis voor zulke toepassingen werd vaak gelegd in een wisselwerking van activiteiten tussen de universitaire en para-universitaire instituten die juist in deze periode in grote aantallen tot ontwikkeling komen, de grote technologische instituten en de industriële laboratoria. Zo schreef in 1948 Shannon zijn baanbrekende artikelen over de wiskundige grondslagen van de informatietheorie vanuit de laboratoria van de Bell Systems telefoonmaatschappij. De grote Amerikaanse beroepsorganisatie Society for Industrial and Applied Mathematics geeft thans elf tijdschriften uit op diverse gebieden van industriële

wiskunde. Wel te verstaan buiten de beroepssferen van de natuurkundigen, de elektrotechnici en de lucht- en ruimtevaartingenieurs, die natuurlijk elk ook een flinke wiskundige component bezitten, maar ieder hun eigen publicatiecircuit hebben.

Een gevoelig punt

Onder de in de tweede helft van deze eeuw tot ontwikkeling gekomen vakgebieden zal wel de informatica de meest pregnante maatschappelijke



(foto NLR)

...veelsoortige wiskunde... voor de gebruikers volstrekt onzichtbaar geworden.

aanwezigheid hebben verworven. Een wiskundige durft hier slechts met de grootste omzichtigheid van een wiskundige wetenschap te spreken, zo gevoelig ligt nog het geboortetrauma. Weliswaar kan worden gewezen op de pioniersrol die door veel eminente wiskundigen bij de ontwikkeling van deze wetenschap is vervuld en als bijkomend stuk van overtuiging worden aangevoerd de vele wiskundigen die sindsdien hun werkkring in de automatiseringssector hebben gevonden. Desalniettemin valt men dusdoende bij de informatisch geschoolde lezer ogenblikkelijk als wetenschappelijke leek door de mand – een lot dat misschien met gelijkmoedigheid moet worden aanvaard zolang het wordt gedeeld[1] met de grote Nederlandse informaticus Edsger Dijkstra.

Hoe dit ook zij, juist de informatica illustreert *in optima forma* het krachtenveld waaraan in de historie telkens weer een complex van wiskundige noties onderworpen blijkt, wanneer dat deel uitmaakt van een anderssoortige, economisch belangrijke ontwikkeling.

Dat proces wordt in de volgende twee historische notities samengevat – vooral de tweede verdient verdere aandacht.

Historische notities

I. Wiskunde is de oudste geldende wetenschap, in de zin dat systematische wiskundige uitspraken uit een ver verleden thans nog betekenis bezitten. Daarentegen zijn wiskundig gekwalificeerde beroepen betrekkelijk moeizaam tot ontwikkeling gekomen.

II. Praktisch bruikbare wiskundige kennis wordt historisch veelal ontwikkeld in een vorm, die zich gemakkelijk in anderssoortige beroepsactiviteiten laat incorporeren. Zodra dit proces is voltooid, wordt deze kennis binnen die beroepsgroep én door de wiskundigen niet meer als onderdeel van de wiskunde ondervonden.

Wiskunde en mayonaise

Water en olie mengen niet. Door toevoegen van een oppervlaktespanning verlagend ingrediënt (in de keuken: de lecithine uit de eidooier) kan echter met enige mechanische inspanning een emulsie worden verkregen (de geraadpleegde scheikundige collega noemde dit een kinetisch evenwicht). In dit produkt zijn de oorspronkelijke bestanddelen niet meer herkenbaar.
Bij analogie noem ik de gang van zaken zoals aangeduid in de tweede notitie hierboven een *emulgatie-proces*. Ik wil dit proces illustreren met de volgende historische *cartoon*. Toen de astronomische navigatie tot ontwikkeling kwam, werden de fundamentele wiskundige noties in zodanige algoritmische vorm gebracht – uitgewerkte rekenvoorschriften en tabellen – dat zij in handen van de stuurlieden konden worden gesteld. Het was voor het aanzien en de werkgelegenheid van de wiskundige stand ongetwijfeld beter geweest, indien deze kennis het geheim was gebleven van een aan boord meegevoerde specialist die, gehuld in witte beroepskleding, dagelijks via door niemand begrepen handelingen de nodige informatie te voorschijn toverde. Thans ontleent de navigator zijn primaire informatie aan satellietbakens en verschijnt de geografische positie van schepen en vliegtuigen na invoeren van één codewoord in de boordcomputer in elke gewenste precisie op het scherm. Vanuit de wiskunde gezien is daarmee het historische emulgatie-proces afgesloten: de onvoorstelbare hoeveelheid veelsoortige wiskunde, die voor de ontwikkeling van zulke apparatuur nodig was, is voor de gebruikers volstrekt onzichtbaar geworden. Zo ergens wordt deze finale technische oplossing van het oorspronkelijk probleem, met voorbijgaan van alle andere inspanning, simpelweg op het conto van de computer science bijgeschreven. Inderdaad: *the medium is the message* – McLuhan[2] voorspelde het al in 1960.
De actuarissen en de landmeters, die vroeger toch zeker als wiskundige beroepsbeoefenaars werden aangemerkt – de grote Gauss heeft zich jaren met de geodesie bezig gehouden – worden thans alleen nog in de huiselijke kring als wiskundigen beschouwd. Binnen de beroepskring van de statistici is de vraag of de universitaire beoefenaars van de

mathematische statistiek er eigenlijk nog wel bijhoren – zij emulgeren kennelijk onvoldoende. De vaak separate universitaire organisatievorm – in de VS staat het Statistics Department meestal los van het Mathematics Department – wijst ook al op een aanstaande boedelscheiding. In de vele vormen van *computational science* (er is nog geen Nederlands equivalent), waarbij voor de tweede term een vak als *natuurkunde, quantumchemie, vloeistofmechanica* en zelfs *meetkunde* kan worden ingevuld, worden weliswaar fragmenten van wiskunde als in een lappendeken bijeengeregen, maar lijkt de band met het *systematisch* wiskundig gezichtspunt bewust doorgesneden, inhoudelijk zowel als disciplinair.
Vooral wiskundige kennis in de vorm van gebruiksklare *software*, zoals onze stuurman die indertijd al kreeg aangeleverd, blijkt een gangbaar artikel. De verschijningsvorm van de software – meer dan de wiskundige inhoud – is in de loop der historie aan sterke verandering onderhevig. Wiskundige kennis wordt thans in steeds meer beroepskringen geëmulgeerd in de vorm van modulair opgebouwde programma-pakketten, niet zelden voorzien van geraffineerde interactieve mogelijkheden tot visualisatie. Met begrijpelijke spijt constateren de wiskundigen, dat ook hier binnen zo'n beroepsgroep – en daarbuiten bij studenten en beleidsmakers – voor dit kenniscomplex niet zelden de aanduiding *informatica* geldt – geheel als voorzien door McLuhan.

Emulgatie of spiraal?

In de samenvatting waarmee het tweede deel van dit opstel begint zal ik het begrip emulgatie-proces nog preciseren en nuanceren. Maar eerst moet nog een mogelijke tegenwerping onder ogen worden gezien: is die zogenaamde emulgatie niet al eerder door H. B. G. Casimir als de *technologie-spiraal* beschreven? Hij doelde op het tijdsinterval dat bestaat tussen de fase van kennisverwerving door wetenschappelijk onderzoek en de fase van technologische vormgeving aan die kennis. Bijvoorbeeld: de wetenschappelijke kennis van de elektrodynamica verworven door de natuurkundigen Faraday en Maxwell werd door de ingenieurs Edison, Bell en Marconi vijf en twintig jaar later in elektrotechniek omgezet. Die technologische fase brengt dan ook vanzelf heel andere beroepsstructuren met zich mee. Is dan wat ik *emulgatie-proces* noem iets meer dan een vertaling naar de wiskunde van Casimir's spiraal in de natuurkunde?

Ik ben geneigd toe te geven dat het eerder iets minder is. Wiskunde is geen natuurwetenschap en naast Casimir's majesteitelijk door de eeuwen rondwentelende spiraal kunnen de wiskundigen slechts een veel onordelijker, barokker, maar ook wel joliger bouwsel tonen. Maar waar het hier om gaat is dat het bij Casimir uitdrukkelijk natuurkundige kennis is die in de tweede fase in technologische versie opnieuw aan de orde wordt gesteld. Terwijl wiskundige kennis die buiten de wiskunde toepassing vindt – inderdaad ook vaak na een aanzienlijk tijdinterval – in de beeldvorming van zowel het betrokken beroepsveld als van het grote publiek qua wiskunde maar in zeer fletse contouren doorkomt.
Zoals gezegd: juist die beeldvorming van de wiskunde is bepalend voor de welwillendheid van de beleidmakers, de toestroom van studenten en de werkgelegenheid voor wiskundigen. Daarom lijkt dit historische emulgatie-proces voldoende interessant om na het in kaart brengen ervan ook de dynamiek erin op te sporen: welke oppervlaktespanning binnen de wiskunde is hier werkzaam?

Over de auteur
Dr. G. Y. Nieuwland is hoogleraar aan de Faculteit der Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit te Amsterdam. Hij is voorzitter van het Curatorium van de Nederlandse Stichting voor de Wiskunde SMC.

Noten

1. In zijn werk draagt Dijkstra de gedachte uit, dat een correct computerprogramma een wetenschappelijke tekst is, waarvan de opbouw, al was het alleen maar terwille van de doelmatigheid, volgens de regels van het wiskundig bewijs dient te verlopen. Van dit standpunt is mij geen geargumenteerde weerlegging bekend.
2. Deze Canadese socioloog filosofeerde aan het eind van de jaren vijftig over het beginnend televisietijdperk.

▶ Kritiek op commentaar

J. Bouw, O. P. Fransen-van Wier, A. Kuipers, J. M. Waalwijk

Een reactie op de boekbeschouwing 'Amerikaanse didactische richtlijnen'

In het algemeen zijn we erg enthousiast over de aangeboden artikelen in Euclides en dat gold opnieuw bij het doorlezen van een aantal artikelen en het maken van diverse vraagstukken uit het recente mei-nummer. In dit nummer bespreekt Piet Verstappen het werkdocument 'Professional Standards for Teaching Mathematics'.
Na een duidelijke inleiding uit hij zijn teleurstelling over de voorbeeldvraagstukken en illustreert dat met een viertal voorbeelden en geeft dan steeds commentaar en bij het lezen dáárvan gingen onze haren overeind staan!
Dit commentaar is voor ons vrijwel geheel onbegrijpelijk en *omdat* – zo denken wij – *hier meer achter zit dan alleen maar een korte afkeuring van enkele vraagstukken*, geven wij hierbij onze reactie. Voor de duidelijkheid herhalen wij steeds even het gestelde.
Voorbeeld 1: 'Een boek wordt willekeurig opengeslagen. Het produkt van de paginanummers is 3192. Bij welke pagina('s) is het boek opengeslagen?' Zijn commentaar: 'Duidelijk onrealistisch en gekunsteld.'

Onze reactie: Wij voelen niets van de afkeuring door de schrijver geuit, integendeel: wij vinden het zelfs een aardige opgave bij het desbetreffende onderwerp. Het is natuurlijke mogelijk dat hij in zijn commentaar doelt op de situatie dat het in het voorbeeld aangehaalde boek ook op de laatste bladzij opengeslagen kan worden gezien de tussen haakjes geplaatste 's' van het woord 'pagina('s)' – maar dat had hij dan duidelijker in zijn commentaar moeten verwerken.

Voorbeeld 2: 'helemaal uit de oude doos is:
– Zoek alle waarden van x waarvoor
$(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$
met zijn commentaar:
'ik heb er wel begrip voor, dat er aansluiting moet blijven met het huidige gebeuren. Deze opstapeling van zinloos gepriegel gaat me echter te ver.'
Juist over dit tweede voorbeeld waren wij enthousiast. Dat leek ons nu een opgave waaruit blijkt of leerlingen de aangeboden leerstof begepen hebben en beheersen en dat is wel iets anders dan het door Piet Verstappen gekarakteriseerde 'zinloos gepriegel'!
Wanneer is in zijn ogen een vraagstuk dan geen zinloos gepriegel?
Voorbeeld 3: De schrijver stelt:
'Onverantwoorde slordigheden vind ik: Hoe groot is 3/4 van 18?'
Vanuit de zuiver wiskundige hoek kunnen wij ons zijn opmerking enigszins indenken, maar in het spraakgebruik is deze zin volkomen ingeburgerd. Men spreekt toch ook over de helft van 100? Overigens: kan de manier waarop men dit zegt iets met de vertaling te maken hebben? (Daarbij zouden wij het juist heerlijk vinden als de doorsnee p.a.-student het antwoord op dit vraagstuk zou weten . . .)
Het vierde voorbeeld geeft een visuele voorstelling van 7 : 1/2. Onder zeven vakjes staan 14 rondjes getekend. Onze vraag bij het zien daarvan was dan wel: 'hoe kun je dit beter stellen?', maar we denken dat dat een hele discussie kan openen. Deze visuele voorstelling van genoemde deling vonden wij een prima zaak. Waarom wordt dit een: 'onverantwoorde slordigheid' genoemd?
Piet Verstappen is docent op een lerarenopleiding en daarom beangstigt zijn commentaar ons nog meer.

Het is niet onze bedoeling in een nietes-welles discussie te belanden; over dit onderwerp kan men heel verschillend denken en urenlang discussiëren. Alleen: het geven van voorbeelden en het maken van vraagstukken ligt ons zo ná aan het hart dat wij niet konden nalaten onze betrokkenheid hierbij te uiten.

Over de auteurs:
Drs. J. Bouw, drs. O. P. Fransen-van Wier, A. Kuipers en J. M. Waalwijk zijn allen docent wiskunde en/of informatica aan de Hogeschool Holland, dependance Dordrecht.

Mededeling

Wiskunde A-lympiade

Afgelopen schooljaar is voor het eerst een landelijke Wiskunde A-lympiade georganiseerd. Aan de voorronde namen 47 scholen met ongeveer 120 teams deel. Zij werkten één dag aan een open opdracht, waarna per school één werkstuk werd ingezonden. Twaalf teams gingen door naar de anderhalve dag durende finale.
Ook het komende cursusjaar (1991/1992) zal er weer een A-lympiade gehouden worden. Er zullen twee rondes zijn. De voorronde zal plaatsvinden op 13 of 14 december 1991 (naar keuze van de school), en de finale op 28 en 29 februari 1992. De enige voorwaarde voor deelname is dat er door een school één of meer teams van vier leerlingen uit 5 of 6 vwo, die wiskunde A in hun pakket hebben, geformeerd worden, en dat er een docent beschikbaar is die als contactpersoon optreedt. Deze laatste zal ook ingeschakeld worden bij de selectie van de teams die naar de finale doorgaan. Er zijn voor de deelnemende teams geen kosten aan verbonden. Begin oktober hebben alle scholen bericht ontvangen, waarna zij zich konden aanmelden.

40 jaar geleden

Vraagstukken

696. Op de *in*geschreven cirkel van een regelmatige zeshoek ABCDEF kiest men een willekeurig punt P. Als $\angle APD = \alpha$, $\angle BPE = \beta$ en $\angle CPF = \gamma$ is, bewijs dan:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma = 72.$$

697. De waarden van x, waarvoor een functie van x nul wordt, noemt men de nulwaarden van deze functie.
Gegeven is de functie:

$$y = (x^2 + ax + 4)(4x^2 - 2ax + 4x + a - 13).$$

a. Hoeveel nulwaarden kan y hoogstens hebben? Licht het antwoord toe.
b. Bewijs, dat y voor elke waarde van a minstens twee nulwaarden heeft.
c. Voor welke *gehele* waarden van a heeft y niet meer dan twee nulwaarden?
d. Voor welke waarden van a heeft y drie en niet meer dan drie verschillende nulwaarden? Bereken deze.

(Eindex. H.B.S.-B., 1951)[1]).

1) In deze opgave is een kleine wijziging aangebracht.

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 39 (1951-1952).

● Verenigingsnieuws ●



▶ Uitwisselings-bijeenkomsten Hawex

Gezien het succes van de proefbijeenkomst in Rotterdam (zie Euclides jrg. 66, nr. 8) worden door de NVvW in de volgende plaatsen Hawex-bijeenkomsten georganiseerd (van 15.45 u tot 18.00 u.):
- maandag 11 nov. ARNHEM
Thorbecke SG, Thorbeckestraat 17
- dinsdag 12 nov. GRONINGEN
Rölingcollege, Melisseweg 2
- woensdag 13 Nov. AMSTERDAM
P. Nieuwland College, Nobelweg 6 (NS Amstel)
- donderdag 14 nov. EINDHOVEN
Technische Universiteit
- donderdag 14 nov. ZWOLLE
Vd Capellen SG, Lassuslaan 230

Uitwisseling van ervaringen en met name *repetities/schoolonderzoeken* vormen de hoofdschotel.
De agenda luidt:
15.45-16.00 Ontvangst
16.00-16.10 Opening
16.10-17.05 Gespreksgroepen/per methode/per vak
17.05-17.25 Repetitie-ruilbeurs; koffie/thee
17.25-17.58 Gezamenlijke discussie
17.58-18.00 Sluiting

Voor de aanmelding (**voor 24 okt.**) verzoeken wij u gebruik te maken van het formulier dat naar elke school is gestuurd (de regio Zuid-West-Nederland ontvangt apart bericht over de vervolgbijeenkomst in februari 1992). Neemt u s.v.p. contact op met Felix Gaillard (076-653218) in het geval u dit formulier niet heeft of andere inlichtingen wenst.

▶ Jaarvergadering/ Studiedag 1991

Zoals eerder in Euclides aangekondigd, wordt op zaterdag **26 oktober 1991** in het Nieuwe Lyceum, Jan Steenlaan 38 te Bilthoven de jaarvergadering/studiedag van de NVvW gehouden.
Aanvang 10.00 uur.

Het thema van de studiedag is:
Ander onderwijs, andere toets(vorm)en!
Hierover worden lezingen gehouden en over nieuwe soorten proefwerken, schoolonderzoeken en eindexamens voor verschillende schooltypen gaat het in de volgende werkgroepen:

W1. Een examen na(der be)kijken.
W2. Experimenteel examen toetsen.
W3. Mondeling SO op de mavo, hoe gaat dat?
W4. Toetssteen of dobbelsteen?
W5. Proefwerken en het nieuwe leerplan.
W6. De B-praktijk te kijk.
W7. Afsluiting van de Basisvorming.
W8. Wiskunde voor zwakpresterende leerlingen in het individueel en voorbereidend beroepsonderwijs.
W9. Andere IBO-stof, andere toetsen: hoe maak je die?
W10. Toetsen havo A. Wat maak je er van als docent en wat maken de leerlingen er van?
W11. De ruimte genomen.
W12. Examens en Wiskunde A: onmogelijke combinatie of goede afsluiting?
W13. Pfff... mondeling SO wiskunde voor havo-B.
W14. Functie-onderzoek in het jaar 2000.
W15. De Wiskunde-Alympiade.

Meer informatie over deze dag en hoe u zich kunt aanmelden staat in Euclides jrg. 67 nr. 1 blz. 24 t/m 28.
Voor telefonische informatie: 076-653218.

▶ Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1990 – 31 juli 1991

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. J. van Lint, secretaris drs. J.W. Maassen, penningmeester F.F.J. Gaillard, overige leden mevr. A.F.S. Aukema-Schepel, J.J. Breeman, J.F.D. Diepstraten (tot 27 oktober), mevr. H. Goemans-Wallis, C.Th. J. Hoogsteder, F.J. Mahieu, mevr. M. Meeder.

Op 13 oktober overleed prof. dr. H. Freudenthal, erelid van de vereniging en op 16 december overleed dr. ir. B. Groeneveld, die van 1962 tot 1970 voorzitter van de vereniging was.
Tijdens de jaarvergadering, op 27 oktober, werd prof. dr. F. van der Blij tot erelid van de vereniging benoemd.

Op zaterdag 27 oktober werd de jaarvergadering gehouden te Bilthoven. Deze jaarvergadering werd gecombineerd met een studiedag. Het thema van de studiedag was 'Aansluiting op vervolgonderwijs'. De aanwezigen op de studiedag konden deelnemen aan één of meer van de volgende groepen over aansluitingsproblemen: Overgang van vwo naar wo; Hto 'Overwogen keuze, gewone keuze'; Mavo-meao; Heao; Pabo; Basisonderwijs-voortgezet onderwijs; Havo-vwo; Mavo/lbo-havo en onderbouw-bovenbouw of een groep 'Wiskunde als zelfstandig creatief vak'.
Centrale lezingen werden gehouden door prof. dr. J.J. Duistermaat met als titel 'Aansluitingsproblemen die aan de universiteit ervaren worden' en door prof. dr. ir. H.C.A. van Tilborg met als titel 'Discrete wiskunde, een afstudeerrichting die motiveert'. Gedurende een gedeelte van de dag was er een presentatie van videobanden van de universiteit van Eindhoven.

Zowel door de plannen van het team W12-16 van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (de COW), als door de plannen van de staatssecretaris met betrekking tot de invoering van de basisvorming in het voortgezet onderwijs, namen het nieuwe leerplan wiskunde 12-16 en de nieuwe examenprogramma's voor mavo en lbo een belangrijke plaats in dit verenigingsjaar in.
In oktober en november hebben in elf plaatsen tweetallen bijeenkomsten van de NVvW en de COW plaatsgevonden waarin de aanwezigen geïnformeerd werden over de plannen van de COW en in de gelegenheid werden gesteld hierover hun mening te geven.
Aan de bijeenkomsten namen circa 1200 docenten deel.
Na deze bijeenkomsten hebben 36 leden zich aangemeld om in 7 regionale werkgroepen de plannen van de COW nader te bestuderen en van kritisch commentaar te voorzien. De resultaten zijn aan de COW doorgegeven en zullen in de COW-voorstellen worden verwerkt.
Bij de werkzaamheden van de vereniging met betrekking tot deze nieuwe plannen werd nauw met de VALO (Veldadvisering Leerplan Ontwikkeling) – wiskunde samengewerkt.

Omdat de COW in 1992 ophoudt te bestaan, heeft de vereniging een veldaanvrage bij de SLO ingediend voor een verdere leerplanontwikkeling voor de eerste jaren van het voortgezet onderwijs met accenten op de ontwikkeling van de algebra en ontwikkeling ten behoeve van het gehele lbo. Van de SLO kreeg het bestuur bericht dat de aanvrage in het jaarprogramma 1992 is opgenomen.
De vertegenwoordigers van de vereniging in de COW, mevr. F.R.M. Meester en dr. J. van Dormolen zijn in Euclides een serie artikelen over het nieuwe leerplan 12-16 begonnen.

Dit verenigingsjaar moesten alle havo-scholen in de vierde klas de leerlingen wiskunde A en wiskunde B aanbieden.
Om de docenten bij dit nieuwe programma behulpzaam te zijn, werd op 26 februari in Rotterdam een proefbijeenkomst gehouden waarop docenten gezamenlijk over de problematiek konden praten en proefwerken uitwisselen. Daar deze bijeenkomst in een behoefte bleek te voorzien, zullen in het komend verenigingsjaar op meerdere plaatsen dergelijke bijeenkomsten worden gehouden. Een werkgroep van de vereniging stelde twee opgavenbundels voor wiskunde A en B havo samen.
In nummer 6 van Euclides gaf het bestuur een advies voor de bezemexamens havo in 1992.

De Werkgroep Interpretatie Eindexamen wiskunde A vwo heeft dit verenigingsjaar het eerste deelrapport, handelend over waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, uitgebracht. Dit rapport is aan de CEVO aangeboden met het verzoek de examens volgens dit rapport op te stellen.

Van PRINT (PRoject Invoering Nieuwe Technologieën) kreeg de vereniging het verzoek de invoering van een nieuwe invulling voor het onderdeel Automatische Gegevensverwerking in het wiskunde A-programma voor het vwo te ondersteunen. Geadviseerd door een twaalftal leden van de vereniging heeft het bestuur in januari een advies over deze invoering gegeven. Dit advies wordt in Euclides gepubliceerd.

De eindexamenbesprekingen waren dit jaar op 16 mei voor wiskunde A vwo in 9 plaatsen en voor wiskunde havo in 4 plaatsen, op 22 mei voor mavo/lbo C en D in 8 plaatsen en op 27 mei voor wiskunde B vwo in 4 plaatsen.
Met de meningen van de docenten, zoals die uit de verslagen blijken, is bij de cesuurbepaling terdege rekening gehouden.
In Euclides, in nr. 2 van jaargang 66, verscheen een samenvatting van de examenbesprekingen vwo en havo 1990 en in nr. 7 van mavo/lbo C en D 1990. In een serie artikelen in deze jaargang werd aandacht besteed aan het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel.

In 1990 schreven de NVORWO (de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken- en Wiskunde Onderwijs) en de NVvW een prijsvraag 'Anders dan anders' uit voor het ontwerpen van geconcretiseerd lesmateriaal voor een afgerond lessenonderdeel in enigerlei bereik van het reguliere wiskunde-onderwijs.

Een jury, bestaande uit prof. dr. F. v.d. Blij (voorzitter), dr. J. van Dormolen, prof. dr. F. Goffree en mevr. drs. N. C. Verhoef hebben de zes inzendingen uitvoerig bestudeerd en een advies aan de besturen van beide verenigingen gegeven. Op basis van dit advies is op 12 april de prijs uitgereikt aan Johan Gademan voor zijn inzending 'Parkeervoorzieningen voor personenauto's' en Jan Hofmeester voor zijn inzending 'De stad Assen'.

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde heeft op 6 oktober in samenwerking met de werkgroep Vrouwen en Natuurwetenschappen de werkgroep Vrouwen en Informatica een landelijke dag georganiseerd met als onderwerp 'Welke factoren beïnvloeden de keuze van meisjes voor exacte vakken?'. Op 23 maart vond een druk bezochte scholingsconferentie plaats met als centraal thema 'Loopbaanplanning', en deskundigheidsbevordering'. De werkgroep heeft een derde poster uitgegeven met als titel 'Perspectief'.

De Didactiekcommissie heeft zich dit jaar beziggehouden met het onderwerp 'Begrijpen'. Leerlingen zeggen vaak dat ze iets begrijpen, terwijl toch blijkt dat ze het niet begrijpen. Men probeert hier meer inzicht in te krijgen.

In de vertegenwoordiging van de vereniging in diverse organisaties vonden dit jaar verscheidene wijzigingen plaats: in de vaksectie wiskunde mavo/lbo van de CEVO werd mevr. G. H. Dekker opgevolgd door mevr. M. Kayser-de Jong, drs. J. W. Maassen volgde dr. P. G. J. Vredenduin op in de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde, terwijl drs. H. G. B. Broekman in de Werkgroep Ontwikkelingsonderzoek NVORWO en NVvW werd opgevolgd door dr. A. van Streun.

Vertegenwoordigers van de Bêta Federatie, de federatie van Nederlandse Natuurwetenschappelijke Beroepsverenigingen, waarbij ook de NVvW is aangesloten, hebben in september een gesprek gevoerd met minister Ritzen. Namens de NVvW heeft de voorzitter aan dit gesprek deelgenomen.
Op initiatief van OMEGA (Overleg Maatschappijleer, Economie, Geschiedenis, Aardrijkskunde) en de NVON (Nederlandse Vereniging van Onderwijsgevenden in de Natuurwetenschappen) vond in februari een bijeenkomst plaats met vertegenwoordigers van de lerarenvakorganisaties waarin plannen werden besproken om te komen tot een platform, teneinde regelmatig met de minister te kunnen overleggen. De voorzitter nam namens de NVvW aan deze bijeenkomst deel.

Het bestuur vergaderde dit jaar twaalf maal. Gedeelten van vergaderingen werden bezocht door de afgevaardigden van de vereniging in de COW, leden van de VALO en één vergadering is gehouden met de inspecteurs drs. W. Kleijne, dr. J. Nijenhuis en J. ten Wolde.
Naast deze vergaderingen waren er diverse bijeenkomsten van bestuursleden met onder andere de redactie van Euclides, Wolters-Noorhoff, de VALO-wiskunde en de Verkenningscommissie Wiskunde.

Mededeling

Videoband 'Wat is statistiek?'

De studierichting Statistiek aan de Universiteit van Amsterdam heeft zich een breed doel gesteld en probeert o.a. de statistiek in ruime zin bekend te maken en te stimuleren. Binnen dat kader is er via de studierichting beschikbaar de video *'Wat is statistiek?'*. Deze video kan gebruikt worden binnen het statistiekonderwijs op havo en vwo om de inhoud van het onderwijs aanschouwelijker te maken en een aantal toepassingen van de statistiek te laten zien.

Korte inhoud van de video.
Wat doet statistiek? Statistiek kan diepgaande problemen oplossen door uit verzamelde getallen eerlijke, bewijsbare conclusies te trekken. Statistiek maakt getallen bruikbaar om de wereld te begrijpen.

Hoe doet statistiek dat? Door 1) bestaande gegevens te verzamelen, 2) nieuwe gegevens te produceren en 3) conclusies uit de gegevens te trekken.

Deze drie stappen worden toegelicht met aansprekende voorbeelden:
- Wat is het verband tussen het aantal dode zeekoeien in de oceaan en het aantal speedboten dat daar vaart;
- Hoe maak je een steekproef? Voorbeelden: het voorspellen van verkiezingsuitslagen en het signaleren van trends onder bevolkingsgroepen;
- Het testen van het nut van medicijnen d.m.v. steekproeven;
- Hoe voer je een bewijs m.b.v. statistische gegevens? Je kunt een gevonden gedicht onderzoeken op woordgebruik en er zo wellicht achterkomen dat het van Shakespeare is. Duracell kon door middel van statistische berekeningen aantonen dat hun batterijen echt langer meegaan.

Duur van de video, technische gegevens.
De videoband duurt ongeveer 15 minuten. Het is een Amerikaanse band die Nederlands ondertiteld is. Het gaat om een VHS-systeem.

Hoe de band te verkrijgen?
De band is te leen voor een periode van max. 3 weken. Als u belangstelling heeft kunt u contact opnemen met:
Universiteit van Amsterdam, Faculteit der Wiskunde en Informatica, mw. drs. M. Jas, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam; tel. 020 - 525 60 70 / 525 65 16.

Overigens zijn medewerkers aan de studierichting Statistiek altijd bereid om voorlichting te komen geven over de nieuwe studierichting. Ook hiervoor kunt u bovengenoemde contactpersoon benaderen.

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Oplossing 627

Er gebeurde inderdaad datgene, waar ik bang voor was. Op mijn vraag 'Wat is X in $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = X^4$?', antwoordde bijna iedereen: 'X = 20615673, gewoon met mijn rekenapparaat!'
Gelukkig controleerden een aantal lezers op de één of andere manier of het eindcijfer 3 inderdaad correct was.

W. M. Banis (20) uit Laren merkte terecht op dat we wel heel voorzichtig moeten zijn met de nauwkeurigheid van rekenapparaten. In plaats van A = 2682440 kunnen we ook ruwweg $2682300 < A < 2682600$ nemen, met nog steeds *dezelfde* X = 20615673!
De 5 ladderpunten waren in dit geval dus eigenlijk een weggevertje.

Verder werd er veel gebruik gemaakt van het softwarepakket DERIVE. Ook het rekenapparaat CASIO fx-82D werd een aantal malen genoemd.
Blijft over het probleem hoe iemand aan die getallen komt. Dan komt men terecht in de theorie van de elliptische krommen. Voor meer achtergrondinformatie kan ik u het boek 'Game, Set & Math' van Ian Stewart aanbevelen. (1989, Basil Blackwell). Op dit moment schrijft Ian Stewart de rubriek 'Mathematical Recreations' in Scientific American. Verder schreef hij de populaire boeken 'The Problems of Mathematics' en 'Does God Play Dice?' Hij weet de moeilijke wiskunde op een eenvoudige manier te brengen, zoals Martin Gardner dat altijd deed.

Door de vele goede inzendingen stijgt de ladder naar 25 punten.
Helemaal alleen staat daar

Arie Heikoop
Lehmhulstraat 13
8266 DH Kampen.

Voor de eerste keer gaat de boekenbon van *f*25,– richting Kampen.
Van harte gefeliciteerd!

▶ Opgave 630

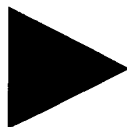
Nu de basisvorming zijn intrede gaat doen, moeten we ook eens aan ons wiskunde-werklokaal gaan denken.

Ik stel me het volgende experiment voor:
In mijn materialenkast liggen 9 verschillende vierkanten van triplex met de afmetingen 1 × 1, 2 × 2 t/m 9 × 9. Remco pakt er drie en Marcel pakt er 3. Er blijven dus nog 3 vierkanten in de kast liggen. Beiden berekenen de omtrek van hun vierkanten en ze krijgen allebei hetzelfde antwoord. Niets bijzonders.
Nu berekenen ze de oppervlakte van hun 3 stukken en ieder krijgt hetzelfde antwoord. Dat is verrassend, maar nog niet verbazingwekkend: er zijn meer mogelijkheden.

Nu gaan we de spanning in de klas opvoeren. Er liggen ook 12 verschillende kubussen in de kast. De afmetingen zijn 1 × 1 × 1, 2 × 2 × 2 t/m 12 × 12 × 12. Martine en Joyce pakken er ieder 4. Ze berekenen de totale ribbenlengte van hun 4 kubussen en ontdekken dat ze hetzelfde antwoord krijgen. Dit doen ze ook met de totale oppervlakte en dan wordt het stil in de klas: beiden vinden hetzelfde getal! Nu pak ik de weegschaal en mag Martine het gewicht van haar 4 kubussen aflezen. Met grote cijfers zet ze dit getal op het bord. Nu is Joyce aan de beurt. Ze legt haar 4 kubussen op de weegschaal, je kunt een speld horen vallen. Joyce schreeuwt het uit: 'Hetzelfde gewicht!'

Thuis wordt dit experiment uitgebreid verteld. In de leraren-kamer vragen collega's wat ik in de wiskundeles aan het doen ben. Een visioen, een droom of . . . is het toch mogelijk?

Als u mij binnen een maand de afmetingen opstuurt, dan ontvangt u 2 + 3 punten voor de ladderwedstrijd.



Verschenen

I. Niven/H. S. Zuckerman/H. L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*; John Wiley & Sons; £ 14.50; 529 blz.

In deze vijfde editie hebben de auteurs de uitvoerige basiscursus getaltheorie uitgebreid met een groot aantal nieuwe paragrafen (o.a. public-key cryptography, geometry of numbers, asymptotic estimations of arithmetic functions, Lenstra's method of factorization).
De verzameling vraagstukken is aangevuld, voornamelijk met moeilijke opgaven. Een deel van de oefeningen is voorzien van hints of antwoorden.

Boekbespreking

Christiaan Huygens, *Verhandeling over het licht*, vertaald uit het Frans door Dieuwke Eringa, met een facsimile van het origineel: [*Traité de la lumière*, Leiden 1690], Utrecht 1990 (Epsilon, deel 18)

In 1690 was het 300 jaar geleden dat in Leiden de *Traité de la lumière* van Christiaan Huygens verscheen. In dit werk, dat Huygens twaalf jaar eerder in Parijs geschreven had, gaf hij een wiskundige beschrijving van de voortplanting van het licht. Zijn werkwijze bestond uit een heen en weer springen tussen theoretische fundering en verwerking van experimentele gegevens. Zijn lichttheorie bouwde hij op een aantal veronderstellingen (vergelijkbaar met wiskundige axioma's). De belangrijkste daarvan stellen:

- licht is een beweging van een fijn verdeelde materie (de ether); de beweging ontstaat doordat deeltjes van de lichtbron botsen tegen etherdeeltjes en
- elk etherdeeltje dat door een stoot getroffen wordt, geeft die stoot in alle richtingen door en wordt zo zelf als het ware een nieuwe lichtbron (het 'principe van Huygens').

Hieruit volgt dan dat de voortplanting van het licht een golfkarakter heeft, want rond een puntvormige lichtbron ontstaan om redenen van symmetrie bolvormige schokgolven. Huygens licht zijn veronderstellingen en de conclusies die hij daaruit trekt met een veelheid van experimenten toe.

In het hedendaagse onderwijs krijgen leerlingen deze methode met de paplepel ingegoten, dus we kijken er nu niet meer van op. Maar ook methoden hebben hun pioniers gehad, en Huygens was met zijn *Traité* (en met andere werken) stellig zo'n pionier. Wat de hedendaagse lezer wèl verbaast is het meetkundige karakter van de argumenten.

Huygens (1629-1695) leefde als wiskundige op een breukvlak van tradities. Enerzijds was er de klassieke Griekse wiskunde, die op de *Elementen* van Euclides, de kegelsnedentheorie van Apollonius en de oppervlakte- en inhoudsberekeningen van Archimedes gebaseerd was. Tijdens zijn leven kwamen daar de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening bij, die bij uitstek geschikt waren voor het bestuderen van veranderlijke grootheden (zo liet Leibniz meteen in de allereerste publikatie over differentiaalrekening, in 1684, zien dat de wet van Snellius voor de lichtbreking direkt af te leiden is door een 'reistijdfunctie' te minimaliseren). Huygens heeft deze nieuwlichterij tot zich genomen, maar niet van harte. In zijn eigen werk is hij een aanhanger gebleven van de Griekse meetkundige technieken, die het werken met oneindig kleine of oneindig grote grootheden juist vermeden. Hierdoor is de *Traité* niet gemakkelijk om te lezen, maar wie zich eraan zet wordt beloond met geïnspireerde meetkunde, die ook nog ergens toe dient. Waar vind je dat nog in een tijd waarin de meetkunde een zorgenkindje is naast vele sterke broers en zussen.

De *Traité* is nu dus voor het eerst in het Nederlands verschenen, in een goed leesbare vertaling waarnaast de originele Franse tekst in facsimile afgedrukt is. Als nawoord is van de hand van H. J. M. Bos een inleiding op leven en werk van Huygens opgenomen, die de *Traité* in breder perspectief plaatst.
Voor de niet historisch geschoolde lezer had het boek wat mij betreft nog korte commentaren en literatuurverwijzingen mogen bevatten. Noten zijn er nu alleen als Huygens namen van wiskundigen en titels van boeken noemt, en ze geven slechts informatie van het type 'Pierre de Fermat, 1601-1665; Frans wiskundige', als Huygens juist verwijst naar wiskundige argumenten van Fermat. Die blijven nu voor de niet-specialist buiten bereik.
Maar verder: een goed initiatief om de *Traité* in het Nederlands beschikbaar te maken, en met een mooi resultaat.

Jan van Maanen

Kalender

9 oktober 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
26 oktober 1991: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW. Zie blz. 60 van dit nummer en blz. 24 t/m 28 van Euclides jg. 67, nr. 1.
4, 5, 6, 7 november 1991: in diverse plaatsen Regionale bijeenkomsten NVvW over W 12-16. Zie Euclides jg. 67, nr. 1, blz. 29 en 30.
11 november 1991: Arnhem, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie blz. 60.
12 november 1991: Groningen, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie blz. 60.
13 november 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
13 november 1991: Amsterdam, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie blz. 60.
14 november 1991: Zwolle en Eindhoven, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie blz. 60.
11 december 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud

Inhoud *33*

H. N. Schuring, C. Lagerwaard, J. W. Maassen: Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1991 *34*

Henk Mulder: Boogbruggen, een wiskundig project *40*

R. Leentfaar: Lange getallen zelf berekenen *44*

Verschenen *46, 63*

Theo Obdeijn: En Cindy dan? *47*

Werkbladen *48*

Francis Meester, Joop van Dormolen: Het nieuwe leerplan 12-16 (3) *50*

Prof Dr. G. Y. Nieuwland: Het beroep van wiskundige (1) *53*

Brief *58*

Mededeling *59*

40 jaar geleden *59*

Uitwisselingsbijeenkomsten Hawex *60*

Jaarvergadering/Studiedag 1991 *60*

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1990 - 31 juli 1991 *61*

Mededeling *62*

Recreatie *63*

Boekbespreking *64*

Kalender *64*